

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA CENTRO DE
CIÊNCIAS SOCIAIS E HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO
DOUTORADO EM ADMINISTRAÇÃO**

Alexandre Silva de Oliveira

**FORMAÇÃO DE PORTFÓLIOS COM O USO DE REDES NEURAIS
ARTIFICIAIS E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE COM
CAUDAS LONGAS**

Santa Maria,
RS, Brasil
2024

Alexandre Silva de Oliveira

**FORMAÇÃO DE PORTFÓLIOS COM O USO DE REDES NEURAS ARTIFICIAIS
E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE COM CAUDAS LONGAS**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Administração, Área de Concentração Gestão Organizacional, Linha de Pesquisa de Finanças, Economia e Controle, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Administração.**

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio Ceretta

Santa Maria, RS, Brasil 2024

Oliveira, Alexandre Silva de

Formação de portfólios com o uso de redes neurais artificiais e distribuição de probabilidade com caudas longas / Alexandre Silva de Oliveira.- 2024.

99 f. ; 30 cm

Orientador: Paulo Sergio Ceretta

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Sociais e Humanas, Programa de Pós-Graduação em Administração, RS, 2024

1. Rede neural artificial 2. Gerenciamento de portfólio 3. Classificação por probabilidade 4. Investimento em ações 5. Mercado de capitais I. Ceretta, Paulo Sergio II. Título.

Alexandre Silva de Oliveira

**FORMAÇÃO DE PORTFÓLIOS COM O USO DE REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS
E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE COM CAUDAS LONGAS**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Administração, Área de Concentração Gestão Organizacional, Linha de Finanaaças, Economia e Controle, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Administração**.

Aprovado em 04 de Março de 2024:

Paulo Sergio Ceretta, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

José Roberto Ferreira Savoia, Dr. (USP)

Rafael Camargo Ferraz, Dr. (UNIPAMPA)

Marta Von Ende, Dr. (UFSM)

Luis Felipe Dias Lopes, Dr. (UFSM)

Santa Maria, (RS), Brasil, 2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família que sempre esteve comigo e reconheceu meu esforço.

Aos Professores Paulo Sergio Ceretta, meu grande mestre inspirador, e Marta Von Ende, ambos da Universidade Federal de Santa Maria, por acreditarem no meu potencial.

Ao Professor José Roberto Ferreira Savoia por sua sabedoria, habilidade e competência inspiradora como docente em Mercado de Capitais da Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo.

Ao Professor Luis Felipe Dias Lopes da Universidade Federal de Santa Maria, meu orientador em Estatística e Modelagem Quantitativa, por seu exemplo de dedicação e sua sempre pronta disponibilidade.

Ao Professor Claiton Ataídes de Freitas, também da Universidade Federal de Santa Maria, pelo convite para ser avaliador de um de seus trabalhos envolvendo redes neurais artificiais quando o assunto ainda era uma grande caixa preta para mim, sendo o gatilho da abertura de um novo mundo em minha mente.

Aos Professores RaFael Camargo Ferraz da Universidade Federal do Pampa, Eduardo Botti Abbade da Universidade Federal de Santa Maria, e Roberto de Gregori, também da Universidade Federal de Santa Maria, por suas contribuições e participação na banca de defesa como titular e suplentes, respectivamente; e ao Professor Giovani Guarienti Pozzebon da Universidade Federal do Pampa, por suas contribuições na banca de qualificação.

Ao Peter Albrecht que conheci pelo programa UNIGOU INCBAC Intitute e que se mostrou um grande parceiro de pesquisa e de publicações internacionais. Da mesma forma agradeço ao Daniel Pastorek por sua parceria em publicações internacionais, ambos da Universidade de Mendel.

Agradeço também a todos os demais professores que indiretamente contribuíram para a produção desta tese: Professores da Univesidade de Harvard, da Universidade de La Verne, da Universidade de Moncton, da Universidade de Mendel, da Universidade de Melborne, da Universidade de Hong Kong, da Universidade de Viena, da Universidade de Paris, da Universidade de São Paulo, da Universidade Federal de Santa Maria e da Universidade Federal do Pampa.

RESUMO

FORMAÇÃO DE PORTFÓLIOS COM O USO DE REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE COM CAUDAS LONGAS

AUTOR: Alexandre Silva de Oliveira

ORIENTADOR: Paulo Sergio Ceretta

Neste estudo experimental é utilizada redes neurais artificiais (RNAs) e Ranking de Probabilidade de cauda longa na construção de carteiras de investimentos. O objetivo é investigar se a formação de portfólio pode ser vista como um problema de classificação, aproveitando as habilidades inerentes das RNAs para capturar relacionamentos complexos, permitindo decisões mais informadas sobre a composição do portfólio. Conduziu-se o experimento utilizando informações de 70 ativos aleatoriamente escolhidos, do mercado brasileiro e americano, e uma amostra de validação composta por todas as empresas pertencentes ao índice S&P500. O estudo abrange diferentes períodos de 2018 a 2023, com mais de 585.650 observações de ativos por dia. A técnica foi comparada com outras técnicas alternativas e com carteiras de mercado: Carteira de mínima variância, carteira de máximo Sharpe, carteira de análise de flutuação com tendência multifractal (MF-DFA), carteira da Berkshire Hathaway e carteira do índice S&P500. Os resultados indicam que o método de classificação proposto utilizando as probabilidades assimétricas da distribuição t de *Student* apresenta desempenho superior ao das carteiras de mercado e das carteiras tradicionais. Além disso, os resultados indicam que a abordagem combinada de RNA e classificação de títulos baseada em suas probabilidades leptocúrticas assimétricas demonstra superioridade sobre carteiras que utilizam apenas classificação por sinais. Como contribuições apresenta-se uma nova forma de formação de portfolio de investimentos, uma nova fronteira eficiente de mercado e um pacote em software R denominado ANNt.

Palavras-Chaves: Rede neural artificial; gerenciamento de portfólio; classificação por probabilidade.

ABSTRACT

FORMATION OF PORTFOLIOS WITH THE USE OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS AND PROBABILITY DISTRIBUTION WITH LONG TAILS

AUTHOR: Alexandre Silva de Oliveira

ADVISOR: Paulo Sergio Ceretta

In this experimental study, artificial neural networks (ANNs) and long-tail Probability Ranking are used to construct investment portfolios. The objective is to investigate whether portfolio formation can be seen as a classification problem, leveraging the inherent abilities of ANNs to capture complex relationships, allowing for more informed decisions about portfolio composition. The experiment was conducted using information from 70 randomly chosen assets, from the Brazilian and American markets, and a validation sample composed of all companies belonging to the S&P500 index. The study covers different periods from 2018 to 2023, with more than 585,650 asset observations per day. The technique was compared with other alternative techniques and market portfolios: Minimum Variance Portfolio, Maximum Sharpe Portfolio, Multifractal Trend Fluctuation Analysis (MF-DFA) Portfolio, Berkshire Hathaway Portfolio and S&P500 Index Portfolio. The results indicate that the proposed classification method using the asymmetric probabilities of the Student's t distribution performs better than market portfolios and traditional portfolios. Furthermore, the results indicate that the combined approach of ANN and security classification based on their asymmetric leptokurtic probabilities demonstrates superiority over portfolios that only use signal classification. As contributions, a new way of forming an investment portfolio is presented, a new efficient market frontier and an R software package called ANNT.

Keywords: Artificial neural network; portfolio management; probability ranking.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Gráfico de dispersão retorno x risco para formação da fronteira eficiente.	26
FIGURA 2 - Neurônio Celular x Neurônio Artificial.	28
FIGURA 3 - Curtose e Assimetria.	34
FIGURA 4 - (a) Rede Neural Artificial com camada oculta, fase de treinamento (Tr) do algoritmo $NNet$. (b) Comparação dos retornos excedentes previstos ($rexc_{p_s}(t)$) versus retornos excedentes reais ($rexc_s(t)$). (c) Distribuição de probabilidade de retornos excedentes ($rexc_{p_s}(t)$) com cálculo dos parâmetros de curtose e assimetria.	43
FIGURA 5 – Delineamento do experimento descrito na seção 4.1 com o objetivo de desenvolver uma carteira inovadora.	46
FIGURA 6 - Exemplificação da redução da análise dos Efeitos de forma fracionada para o $25 - p$ Experimento Fatorial.	48
FIGURA 7 - Delineamento do procedimento de validação do experimento descrito na seção 4.2.....	49
FIGURA 8 - Delineamento do método empregado na seção 4.3.	54
FIGURA 9 - Delineamento do método utilizado para comparar carteiras RNA-t e Value Investing na seção 4.4.	61
FIGURA 10 - Retorno x Tamanho da Carteira de Investimentos.	65
FIGURA 11 - Amostras piloto de modelagem experimental das técnicas propostas.	66
FIGURA 12- Desempenho absoluto e relativo (%) das diferentes metodologias de modelagem de carteiras de investimento, apresentadas na seção 3.1, com uso de RNA-t...	69
FIGURA 13 - Retornos x Tamanho das Carteiras com Ativos S&P500.	70
FIGURA 14 - Amostras S&P500 para validação de modelo em Tr treinamento.....	72
FIGURA 15 - Amostras S&P500 para validação de modelo em Ts teste.....	73
FIGURA 16 - Desempenho dos métodos testados com a amostra de validação.....	74
FIGURA 17 - Comparação dos retornos acumulados dos portfólios com 5, 10, 15 e 20 ativos.	77
FIGURA 18 - Comparação dos retornos acumulados de curto prazo das carteiras $SP500$, $Buffet$, $ANnt_{Eq}$, $ANnt_{Mkw}$, $ANnt_{Sharpe}$, $Markowitz$ e max_{Sharpe}	80
FIGURA 19 - Comparação dos retornos acumulados de longo prazo das carteiras $SP500$,	

Buffet, ANNt_Eq, ANNt_Mkw, ANNt_Sharpe, Markowitz e max_Sharpe.
..... 84

FIGURA 20 - Fronteira eficiente e técnica alternativa para seleção de carteiras utilizando ANNt.
..... 86

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Principais funções de ativação (φ).	29
TABELA 2 - Técnicas de geração de carteiras utilizadas no experimento da seção 4.1.	45
TABELA 3 - Equações para geração dos portfólios comparados.	51
TABELA 4 - Portfólios comparados e o número de ativos considerados nas amostras.	52
TABELA 5 - Parâmetros de validação dos resultados.	53
TABELA 6 - Equações de geração das carteiras comparadas.	57
TABELA 7 - Período de análise da 1 ^o e 2 ^o série temporal (rebalanceamento) na amostra total.	59
TABELA 8 - Parâmetros de validação.	60
TABELA 9 - Análise descritiva de retornos de carteiras de amostras e subamostras de modelagem.	67
TABELA 10 - Teste t e análise de variância ANOVA da amostra piloto.	68
TABELA 11 - Análise do resultado do experimento.	75
TABELA 12 - <i>Backtesting</i> dos portfólios selecionados.	78
TABELA 13 - Avaliação de desempenho de carteiras parametrizadas pelo retorno e risco da amostra de backtest de curto prazo.	81
TABELA 14 - Avaliação de desempenho de carteiras parametrizadas pelo retorno e risco da amostra de backtest de longo prazo.	85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

α	Alfa de Jensen
AAPL	Ações da Apple Corporation
a, b, c	Níveis de fator
ab, ac, bc, abc	Combinações de níveis de fator
ADM	Ações da Archer-Daniels-Midland Company
α_4	Coefficiente de momento de curtose
α_3	Coefficiente de assimetria de momento
AEE	Ações da Ameren Corporation
ALGN	Align Technology Inc.
AKAM	Akamai Technologies Inc.
ANET	Arista Networks Inc.
ANN	<i>Artificial Neural Net</i>
ANNt	<i>Artificial Neural Net with t-distribution of probability</i>
ANN-t	Variante simbólica da expressão ANNt
ANNt_Eq	ANNt com pesos uniformemente distribuídos
ANNt_Mkw	ANNt com pesos de variância mínima de Markowitz
ANNt_Sharpe	ANNt com pesos máximos de proporção de Sharpe
AXP	Ação American Express
BAC	Ações do Bank of America
β	Beta CAPM
$\beta_{p,d}^A$	Beta anualizado de retornos negativos
BAX	Baxter International Inc.
β_0	Viés da camada de entrada
β_0'	Viés da camada oculta
[B]3	Brasil, Bolsa & Balcão
BSF	Função de etapa binária

Buffett	Portfólio Buffet, Ações com Mais de 80% do Valor do Portfólio Berkshire Hathaway
c	Ponto de Corte da Distribuição Analisada
C	RNA programada
CAPM	Modelo de precificação de ativos de capital
CBOT	Chicago <i>Board of Trade</i>
C_M_S	Carteira MC ANN classificada por sinal(S^+ ou S^-)
C_M_T	Portfólio MC ANN com distribuição de alunost
C_S : Markov	RNA programada com classificação de sinal superior a Markowitz
C_S_Tr	Durante o período de treinamento $C_M_ST_r$
C_S_Ts	Durante o período de teste $C_M_ST_s$
C_S : SP500	RNA programada com classificação de sinal superando S&P500
C_T : Markov	RNA programada com classificação de distribuição <i>Student t</i> de Student superando Markowitz
CTRA	Coterra Energy Inc.
C_T : SP500	RNA programada com classificação de distribuição <i>t</i> de <i>Student</i> superando S&P500
C_T_Tr	Durante o período de treinamento $C_M_TT_r$
C_T_Ts	Durante o período de teste $C_M_TT_s$
$CVaR_{1-\gamma}$	Valor Condicional em Risco
CVX	Ações da Chevron Corporation
DJIA	Média Industrial Dow Jones
$d_j(n)$	Resposta desejada para o neurônio(j)
dn	Defasagem dos retornos
ELU	Unidade Linear Exponencial
ε	Erro
$ef(F)$	Efeito do fator (F)
$e_j(n)$	Sinal de erro do neurônio (j)
$E(RA_{pf})$	Retorno esperado cumulativo
EMH	<i>Efficient Market Hypothesis</i>
ENPH	Ações da Enphase Energy Inc.

$E(R_{Pf})$	Média esperada retornar
$E(R_{Pf})_{Aj}$	Retorno esperado ajustado ao risco (variância)
$E(R_{Pf})_{Sharpe}$	Retorno esperado ajustado por Sharpe
$E(R_{Portfolio})_{Aj}$	Esperado retornos da carteira ajustados ao risco
$E(r_{t,s_{exc}})$	Excesso de Retorno Esperado no período t do ativo s
EU	Erro médio
fA	Fator A - número de épocas ou número de repetições
$\bar{f}A_{B+}$	Fator médio no nível $fBB +$
$\bar{f}A_{B-}$	Fator médio no nível $fBB -$
fB	Fator B – forma de classificação dos ativos, sinal ou distribuição t de <i>Student</i>
fC	Fator C – amostra distinta, modelagem ou validação
fD	Fator D – referência, carteira S&P500 ou carteira de variação mínima
fE	Fator E -duas distribuições de peso dos ativos das carteiras.
FLANN	<i>Fuzzy Logic Artificial Neural Net</i>
$f_q(s)$	Função de flutuação de ordem q
$f_{r_{exc.p.s(t)}}(r_{exc.p.s(t)})$	Função de $r_{exc.p.s(t)}$
$f(t)$	Função densidade da distribuição t de <i>Student</i> no período t
FTSE100	Bolsa de Valores do Financial Times
Γ	Função gama
$\varphi(.)$	Função de ativação
ϕ	Matriz de covariância
γ	Nível de confiança
GEN	Gen Digital Inc.
$h(q)$	Expoente de Hurst
i	Número de carteiras
l	Dado por uma linha
j	Sinapse
JBHT	Johnnie Bryan Hunt Transport Services Inc.
k	Neurônio
KHC	Kraft Heinz

KO	Coca-Cola
l°	Momento absoluto (M)
LSTM	Memória de longo prazo
M	Momentos
μ	Significar
Markov	Carteira Markowitz aplicada a todos os ativos S&P500
Markowitz	Portfólio de Variância Mínima de Markowitz
MC	Criado manualmente
Md	Mediana
MDM	Medida de Deficiência de Mercado
MF_DFA	Análise de flutuação multifractal sem tendência
MLP	Perceptrons multicamadas
Mkv_Tr	Ativos de Markov durante o período de treinamento T_r
Mkv_Ts	Ativos de Markov durante o período de teste $-T_s$
Mo-	Moda
n	Iteração de treinamento
N	Número de ativos
Nasdaq	<i>National Association of Securities Dealers Automated Quotations</i>
NEF	Novo Conceito de Fronteira Eficiente
Nnet	Pacote NeuralNet de R
NNet_S	Portfólio NNet ANN classificado por sinal (S^+ ou S^-)
NNet_T	Portfólio NNet ANN com distribuição de <i>student</i>
NNet_T_M	Portfólio NNet ANN com distribuição de <i>Student</i> e pesos Markowitz tw_s
$n^\circ ANN$	Número de RNAs
N_S : Markov	Pacote NeuralNetRNA com classificação de sinais superando Markowitz
N_S : SP500	Pacote NeuralNetRNA com classificação de sinal ultrapassando S&P500
N_S_Tr	NNet _s durante o período de treinamento T_r
N_S_Ts	NNet _s durante o período de teste NNet_ST _s
N_T : Markov	Pacote NeuralNetRNA com classificação de distribuição t de <i>Student</i> superando Markowitz
N_T : SP500	Pacote NeuralNetANN com classificação de distribuição t de <i>Student</i> superando S&P500
N_TM : SP500	Pacote NeuralNetRNA com classificação de distribuição t de <i>Student</i> e

	pesos de mínima variância superando S&P500
N_TM : Markov	Pacote NeuralNetRNA com classificação de distribuição t de <i>Student</i> e pesos de mínima variância superando Markowitz
N_TM_Tr	Durante o período de treinamento $Nnet_T_MT_r$
N_TM_Ts	Durante o período de teste $Nnet_T_MT_s$
N_T_Tr	Durante o período de treinamento $NNet_TT_r$
N_T_Ts	Durante o período de teste $NNet_TT_s$
OXY	Ação Ocidental de Petróleo
pi	Índice de fração
p	Simplificação para Portfólio pf
P/B	Preço por valor de mercado
P/CF	Preço por fluxo de caixa
P/E	Preço por Lucro
Pf	Portfólio
P/S	Preço por ação
$PRELU$	Paramétrico <i>ReLU</i>
$P(r_{exc_p_s}(t))$	Probabilidade de ser maior que o retorno do índice S&P500
p_s	Preço de fechamento dos ativos
$p_{t,s}$	Preços ajustados diariamente no período t do ativo s
p_{t-1}	Preço ajustado defasado em um período
$P(X)$	Probabilidade de X
$P(X \leq x)$	Probabilidade de que menos de Xx
$p(x)dx$	Densidade de Probabilidade de x
q	Ordem de flutuação
Q1	Primeiro Trimestre
Q2	Segundo trimestre
\mathbb{R}^I ,	Números reais em I
$ReLU$	Unidade Linear Retificada
$r_{exc_p_s}(t)$	Previsão do excesso de retorno dos ativos no período
$r_{exc_s}(t)$	Excesso do retorno observado do ativo no período t
R_{Mkv}	Retornos da carteira de variância mínima (carteira Markowitz)
RMSE	Erro quadrático médio

RNA	Rede Neural Artificial
RNA-t	RNA com distribuição t de probabilidade (ANNt em português)
r_s	Retorno do ativo s
\bar{r}_s	Retorno médio do ativo s
$R_{s+/-}$	Retornos das carteiras obtidos por distribuição de sinais
R_{SP500}	Retorno do índice S&P500
r_f	Livre de risco
\bar{r}_p	Retorno Médio do Portfólio
R_p	Vetor Médio de Retornos de Ativos
r_p^A	Retorno Anualizado
r_p^C	Retorno Cumulativo
$r_{p,t}$	Devolução da Carteira no Período t
$r_{t, Buffett}$	Retorno sobre o portfólio de referência de Warren Buffett
$r_{t,s}$	Retornos diários no período t do ativo s
$r_{t,s_{exc}}$	Excesso de retorno no período t do ativo s
s	Ativo
S	Desvio padrão
S_-	Razão de Sharpe
S^+	Sinal de retorno positivo
S^-	Sinal de retorno negativo
s_c^-	Conjuntos
S_E	Erro padrão
S&P500	Índice Standard & Poor's
SLP	Perceptron de camada única
S_d	Desvio Padrão da Amostra
SEC	Comissão de Valores Mobiliários
S&P500	Índice Standard & Poor's
Sharpe	Portfólio de Taxa Máxima de Sharpe

SP500	Portfólio S&P500
σ_p	Desvio Padrão do Portfólio
σ_p^A	Volatilidade Anualizada
$\sigma_{p,d}^A$	Desvio Padrão Anualizado de Retornos Negativos
σ_p^2	Variância do portfólio
<i>Sort</i>	Índice de Sortino
S_p	Índice de Sharpe
Σ	Adicionador
SP_Tr	S&P500 durante o período de treinamento T_r
SP_Ts	S&P500 durante o período de teste T_s
s_t	Observações do dia do ativo
<i>Passo máximo</i>	Número de repetições ou treinamento
Σ	Somador
t	Período ou intervalo
T	Período total analisado
<i>Tanh</i>	Função tangente
<i>t-Bills</i>	Letra do Tesouro
T_e	Amostra de teste
T_o	Número de observações do dia dos ativos
T_r	Amostra de treinamento
<i>Try</i>	Índice de Treynor
<i>TSLA</i>	Incorporação Tesla
TSX	Bolsa de Valores de Toronto
T_{Tr}	Número de observações do dia dos ativos na fase de treinamento
T_{Ts}	Número de observações do dia dos ativos na fase de teste
TWTR	Twitter Inc.
<i>ULE</i>	Função Exponencial Linear Unitária
u_k	Saída de Neurônios k
USA	Estados Unidos

u_k	Combinação linear
v	Subintervalo de observação
v_k	Potencial de ativação
w_{kj}	Pesos dos neurônios k
w_n	Terminais sinápticos
WRB	Ações da William Robert Berkley Corporation
\hat{y}_k	Áxion (sinal de saída)
$y_j(n)$	Sinal de saída do neurônio(j)
$y_v(t)$	Primeira diferença entre o retorno observado r_s e o retorno médio \bar{r}_s
z	Função de $r_{exc_s}(t)t$
x	Variável genérica analisada
X	Dado valor de $r_{exc_s}(t)$
X_{Ei}	Neurônios de entrada
x_{Hjj}	Camada Oculta
x_{Ij}	Camada de entradas
x_j	Entradas
x_n	Dendritos
x_S	Saídas
X_{Ei}	Neurônios de entrada
x_{Hjj}	Camada Oculta
x_j	Sinal de entrada do neurônio j
X_{Ocj}	Camadas ocultas
X_S	Camada de saída

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	OBJETIVOS.....	22
1.1.1	Objetivo Geral.....	22
1.1.2	Objetivos Específicos.....	22
2	MODELO TEÓRICO E METODOLÓGICO.....	25
2.1	MODELO TEÓRICO	25
2.2	MODELO METODOLÓGICO	27
3	REFERENCIAL TEÓRICO-EMPÍRICO E FORMULAÇÃO DAS HIPÓTESES	31
3.1	USANDO RNAs PARA PREVER RETORNOS DE ATIVOS.....	31
3.2	HIPÓTESE DE CURTOSE E ASSIMETRIA DE DADOS FINANCEIROS	33
3.3	HIPÓTESE DE EFICIÊNCIA DE MERCADO.....	36
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	39
4.1.	DELINEAMENTO DO EXPERIMENTO COM RNA E DISTRIBUIÇÃO <i>t</i> DE <i>STUDENT</i>	39
4.2	MÉTODO DE VALIDAÇÃO DO EXPERIMENTO	47
4.3	TESTE DO MODELO COMPARANDO COM CARTEIRA DE ANÁLISE DE FLUTUAÇÃO COM TENDÊNCIA MULTIFRACTAL	50
4.4	TESTE DO MODELO COMPARANDO COM CARTEIRAS <i>VALUE INVESTING</i>	55
4.4.1	Métodos.....	56
4.4.2	Validação	58
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	63
5.1	O EXPERIMENTO RNA COM DISTRIBUIÇÃO <i>t</i> DE <i>STUDENT</i>	63
5.2	RESULTADOS DA VALIDAÇÃO DO EXPERIMENTO	69
5.3	TESTE DO DESEMPENHO DO MODELO ANN- <i>t</i> COM A CARTEIRA MF-DFA ...	76
5.4	TESTE DO DESEMPENHO DO MODELO ANN- <i>t</i> COM A CARTEIRA <i>VALUE INVESTING</i> DA BERKSHIRE HATHAWAY	79
5.4.1	Perspectiva de curto prazo.....	79
5.4.2	Perspectiva de longo prazo	83
5.4.3	Conceito de fronteira eficiente	86
6	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	88

REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A – ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO EM SOFTWARE R.....	100

1 INTRODUÇÃO

A inclusão de características não lineares observada nos mercados financeiros representa um desafio significativo para as teorias clássicas de criação de carteiras de investimentos que assumem relações lineares. A utilização de redes neurais artificiais (RNAs) com o uso de estatística ajustada a dados financeiros é a lacuna teórica/metodológica que se circunscreve na tese, tornando-se uma alternativa promissora na otimização de portfólios de investimentos, dada a sua capacidade de modelar relacionamentos e padrões complexos nos dados, que podem ser empregadas para maximização do retorno ou minimização do risco.

Reconhecendo as limitações dos modelos tradicionais de precificação de ativos, Atsalakis e Valavanis (2009) conduziram uma pesquisa na qual identificaram mais de 100 artigos defendendo o uso de RNAs há mais de dez anos. Entre 2011 e 2021, Ahmed et al. (2022) igualmente descobriram uma quantidade expressiva de estudos, superior a 300, que foram publicados com o tópico RNA aplicado ao setor financeiro.

A maioria dos estudos financeiros concentra-se, principalmente, no emprego de redes neurais artificiais para prever o mercado, como em Kara, Acar Boyacioglu e Baykan (2011) ou para prever ações individuais (EAKINS; STANSELL, 2003). Mas também comparam a construção de portfólio baseada em redes neurais com outros tipos de modelos de previsão, tais como a regressão linear ou logística (OLSON; MOSSMAN, 2003).

Embora um número significativo de estudos apoie a superioridade dos modelos de RNA na previsão das séries analisadas, a maioria das RNAs modeladas depende fortemente da utilização de diversos dados econômicos e financeiros provenientes de diversas fontes, diferentemente da proposta de estudo que aqui se apresenta. Um trabalho exemplar nesse sentido é o de Chen, Pelger e Zhu (2019), o qual se concentra no desenvolvimento de metodologias que aproveitem efetivamente o fluxo constante de novas informações. Outro exemplo é o trabalho de Morris e Comeau (2020) que classifica ativos com o uso de sinais. Porém, nenhuma iniciativa, até então, observa-se na literatura com o propósito de otimização de portfólios por meio de redes neurais artificiais e inclusão de distribuições de probabilidade ajustadas à dados financeiros (OLIVEIRA; CERETTA, 2022, 2023; OLIVEIRA; CERETTA; ALBRECHT, 2023).

Neste contexto, o presente estudo busca responder a seguinte questão problema: *É possível desenvolver um processo metodológico que permita montar uma carteira com redes neurais artificiais e distribuição de probabilidade com caudas longas que supere as carteiras tradicionais?*

1.1 OBJETIVOS

Com o propósito de responder à questão problema, os objetivos do presente estudo foram divididos em geral e específicos.

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma forma metodológica inovadora para geração de carteiras com o uso de Redes Neurais Artificiais e distribuição de probabilidade com caudas longas que apresente resultados competitivos frente às opções tradicionais de formação de carteiras de investimento.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral da pesquisa, estipulou-se os seguintes objetivos específicos:

(i) Experimentar se as probabilidades de classificação t de *Student* na RNA contribuem para que a carteira obtenha melhores retornos em comparação com os retornos de carteiras *benchmark* de mercado e a carteira de classificação por sinal com o uso de RNA (MORRIS; COMEAU, 2020);

(ii) Validar o desempenho da estratégia de construção de portfólio proposta através da comparação de performance com outras carteiras tradicionais, como o S&P500 e Variância Mínima de Markowitz, por meio de *backtest*;

(iii) Verificar se a estratégia baseada na classificação de RNA supera a carteira de análise de flutuação com tendência multifractal (MF-DFA) de Maciel (2021), com o uso de *backtest* e retornos acumulados;

(iv) Avaliar se a estratégia supera carteiras tradicionais, como as geradas por *Value Investing* da Berkshire Hathaway Inc (2023), através de *backtest* e rebalanceamento.

1.2 JUSTIFICATIVA

A construção de carteiras RNA, como apresentado na literatura financeira contemporânea, exige muita informação de dados econômicos e financeiros, o que torna o processo de coleta de dados um problema. Nesta tese, pretende-se evitar o uso de diversas fontes para busca de variáveis preditoras, utilizando informações defasadas de retorno de ativos para prever retorno de ações e formar carteiras de investimentos com desempenho superior. Ao

utilizar esta abordagem, afasta-se da tradicional dependência de múltiplas categorias de dados econômicos ou financeiros obtidos de diferentes fontes e submete-se a metodologia adotada a condições mais rigorosas.

Uma das premissas adotadas é de que a formação de carteiras pode ser vista como um problema de classificação, envolvendo a categorização de ativos em classes e grupos distintos (OLSON; MOSSMAN, 2003). As RNAs podem ser empregadas para identificar características únicas dos ativos e capturar relacionamentos complexos na classificação de ativos, permitindo decisões mais embasadas sobre a composição do portfólio. Esta abordagem baseia-se na crença de que os ativos possuem características distintas e, categorizá-los sistematicamente, pode otimizar o perfil de risco e desempenho de uma carteira.

O portfólio RNA construído é empregado para prever o excesso do retorno esperado. Estende-se o método adicionando à probabilidade t de *Student*, conforme Student (1908), assimetricamente, uma vez que foi confirmado que o uso da dependência assimétrica melhora a diversificação da carteira, de acordo com Rachev et al. (2010) e Stoyanov et al. (2011). A conjugação das técnicas nomeou-se como ANNt.

A necessidade da criação do produto ANNt pode ser justificada pela infinita quantidade de informações disponíveis no mercado, sendo oportuno o desenvolvimento de metodologias e aparatos tecnológicos que permitam tratar as informações de forma rápida e precisa para superar o desempenho do mercado.

1.3 INOVAÇÃO DO ESTUDO

Em comparação com a literatura atual, a novidade deste estudo está na integração de redes neurais artificiais (RNAs) configuradas manualmente, na distribuição de probabilidade leptocúrtica assimétrica que melhor representa a natureza estocástica dos dados financeiros, e na utilização da distribuição t de *Student* como uma técnica de classificação na construção de portfólio. Esta combinação inovadora de metodologias contribui para explorar o potencial das RNAs na otimização de portfólio e distingue este estudo da literatura anterior sobre o tema; ver, por exemplo, (MORRIS; COMEAU, 2020; OLIVEIRA; CERETTA; ALBRECHT, 2023). Como resultado, desenvolveu-se uma nova fronteira eficiente (NEF) que invés de relaciona retorno x risco, relaciona o retorno com a probabilidade do retorno superar o mercado, e desenvolveu-se um pacote para o software R, disponível na plataforma GitHub, para geração de carteiras com a nova metodologia (OLIVEIRA; CERETTA, 2023).

1.4 ESTRUTURA DO ESTUDO

O trabalho prossegue apresentando no Capítulo 2 o modelo teórico da moderna teoria de formação de portfólios e o modelo metodológico de RNAs. O Capítulo 3 apresenta o referencial teórico-empírico e formulações das hipóteses. O Capítulo 4 descreve a metodologia empregada no estudo, abordando aspectos como os dados utilizados e a arquitetura RNA utilizada, o cálculo dos sinais de retorno e a distribuição de probabilidade leptocúrtica assimétrica, os ajustes de retorno e a formação do portfólio. O Capítulo 5 apresenta os resultados do estudo enquanto, o Capítulo 6, os discute e apresenta as considerações finais.

2 MODELO TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo apresenta-se os dois principais modelos que fundamentam esta tese: a teoria de portfólios e o procedimento com redes neurais artificiais.

2.1 MODELO TEÓRICO

O modelo mais difundido na literatura é o modelo teórico de formação de portfólios analisa o trade-off retorno x risco (MARKOWITZ, 1952; SHARPE, 1964). Existem outros modelos, como o da análise de valor da companhia, considerando a menor relação entre preço de mercado e valor da companhia (GRAHAM, 1962; HAMADA, 1969). E o modelo de soma do ranqueamento de retorno do capital e o ranqueamento de lucratividade da companhia (GREENBLATT, 1999).

Markowitz (1952) prova de forma teórica e empírica que existem carteiras com maiores retornos para certos níveis de risco, definindo a chamada fronteira eficiente. O princípio central da teoria é a diversificação, envolvendo alocação de recurso em diferentes ativos para reduzir risco. A teoria postula que é possível reduzir o risco combinando ativos não perfeitamente correlacionados, a um nível em que o risco se iguala ao risco de mercado, chamado de risco sistemático. O produto da diversificação permite eliminar o risco específico de um ativo, chamado de risco não sistemático.

Três principais pontos são considerados pela teoria: retorno, risco e correlação. O retorno esperado é diferente para cada ativo. O risco é mensurado pela variância e covariância dos ativos. Enquanto que a correlação mede o quanto os ativos se movem de forma igual ou não, assumindo valores de +1 a -1. Ativos com correlação +1 se movimentam de forma exatamente iguais. Ativos que se movimentam de forma completamente oposta possuem correlação -1 (ELTON; GRUBER, 1976).

O retorno esperado da carteira (r_p) é dado pelo produto:

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i, \quad (1)$$

em que w_i é o peso atribuído ao ativo i e r_i é o retorno esperado do ativo i . A variância do portfólio (σ_p^2) é definida por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n (w_i^2 \sigma_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (w_i w_j \sigma_{ij}), \quad (2)$$

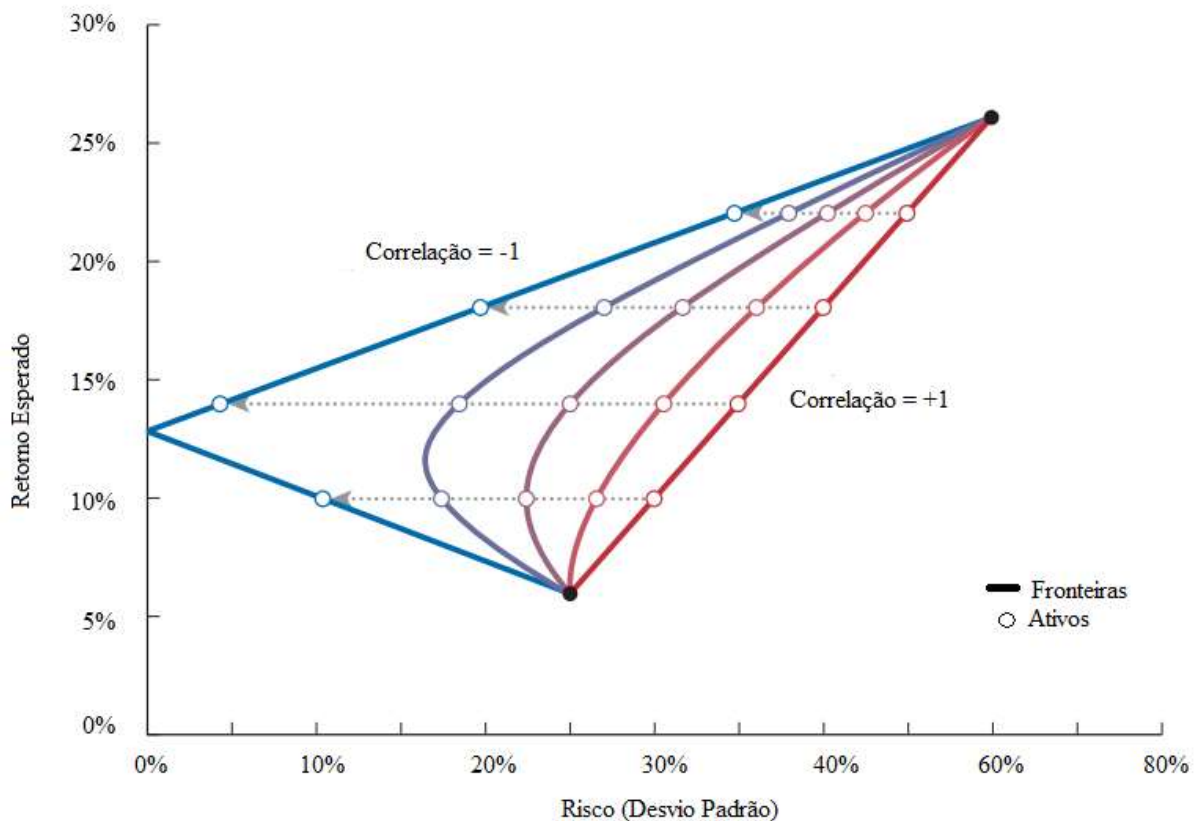
sendo σ_i^2 a variância do ativo i e σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j . E a correlação entre os ativos (ρ_{ij}) é definida como:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (3)$$

sendo σ_i o desvio padrão do ativo i e σ_j o desvio padrão do ativo j .

A Figura 1 ilustra um gráfico de dispersão de diferentes ativos gerando fronteiras eficientes de acordo com a correlação, variando de +1 a -1.

Figura 1 - Gráfico de dispersão retorno x risco para formação da fronteira eficiente.



Fonte: Adaptado de Elton e Gruber (1976).

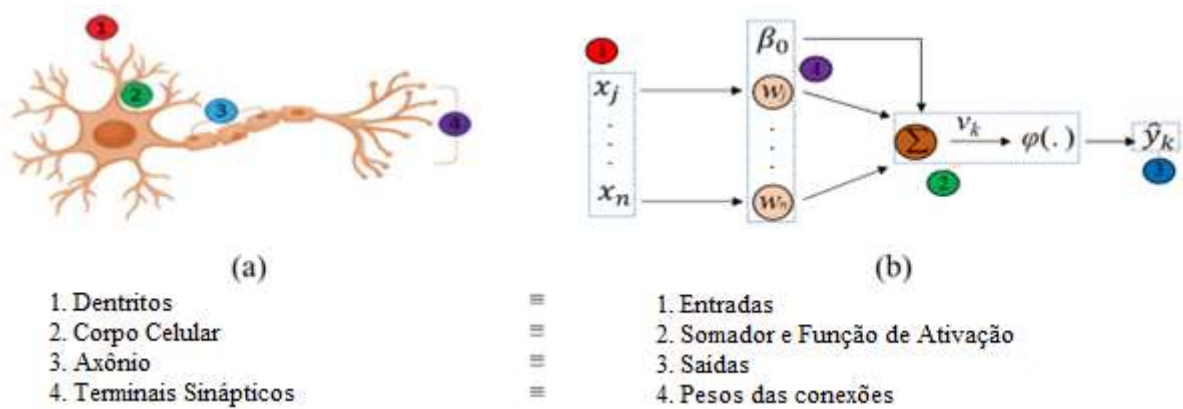
2.2 MODELO METODOLÓGICO

O campo das redes neurais artificiais (RNAs) deve seu início ao trabalho seminal de Mcculloch e Pitts (1943) que forneceu uma maneira de descrever as funções cerebrais em termos abstratos e mostrou que elementos simples conectados em uma rede neural podem ter imenso poder computacional. A partir das ideias de *On Computable Numbers* de Turing (1937), Mcculloch e Pitts (1943) mostraram que muitas escolhas particulares entre possíveis suposições neurofisiológicas são equivalentes no sentido de que, para cada rede que se comporta sob uma suposição, existe outra rede que se comporta sob outra suposição e fornece os mesmos resultados; embora, talvez, não ao mesmo tempo. No texto original os autores discutem várias aplicações do cálculo.

Subsequentemente, autores como Hebb (1949) e Tyagi e Abraham (2022) fizeram contribuições significativas ao demonstrar como ocorre o processo de aprendizagem em redes neurais artificiais por meio do ajuste dos pesos de entrada dos neurônios. O trabalho de Hebb lançou as bases para o desenvolvimento de algoritmos de aprendizagem em RNAs. Ao longo dos anos, numerosos pesquisadores elucidaram ainda mais as origens das RNAs, traçando paralelos com o funcionamento dos neurônios cerebrais fisiológicos. Autores como Haykin (1994) e Tyagi e Abraham (2022) forneceram *insights* sobre os fundamentos conceituais das RNAs, destacando sua conexão com os processos complexos observados no cérebro humano. Através de suas contribuições, a compreensão das RNAs avançou e facilitou aplicações em diversos campos.

A Figura 2(a), adaptada de Haykin (1994) e Tyagi e Abraham (2022) ilustra a origem das RNAs dos neurônios cerebrais fisiológicos. Os neurônios cerebrais naturais têm quatro partes: dendritos, corpo celular, axônios e terminais sinápticos. Os neurônios codificam entradas e saídas como uma série de pulsos curtos de tensão, conhecidos como sinapses. As mais comuns são as sinapses químicas, convertendo sinais elétricos em sinais químicos e, depois, novamente em sinais elétricos. Os dendritos são as zonas receptivas; o corpo celular ou soma é onde estão o núcleo, o citoplasma e as organelas; e os axônios são as linhas de transmissão para os terminais sinápticos.

Figura 2 - Neurônio Celular x Neurônio Artificial.



Fonte: Adaptado de Haykin (1994, p. 36) e Tyagi e Abraão (2022, p. 5).

Haykin (1994) destaca as principais características das RNAs, altamente relevantes em modelos de precificação de ativos e teorias de criação de portfólio, dentre as quais estão a não linearidade, a capacidade de mapeamento, a adaptabilidade, o reconhecimento de padrões, a ativação neuronal, a tolerância a falhas, o desempenho de tarefas, a universalidade e as origens miméticas, ou seja, a capacidade de imitar.

As RNAs apresentam constituição não linear, possibilitando a modelagem de relacionamentos complexos os quais mapeiam entradas e saídas, facilitando a análise na precificação de ativos. As RNAs se adaptam às mudanças nas condições do mercado, encontram padrões e ativam neurônios para processamento de informações; eles toleram falhas e executam tarefas, descobrindo padrões intrincados. Sendo universais, as RNAs contribuem e recebem de outras redes (HAYKIN, 1994).

Tais características são essenciais para alavancar RNAs em modelos de precificação de ativos, possibilitando a modelagem eficaz de relacionamentos não lineares, detecção de padrões e adaptabilidade à dinâmica do mercado. Quando compreendemos essas características, podemos aproveitar o poder das RNAs para aprimorar o entendimento da precificação de ativos e otimizar estratégias de investimento (TYAGI; ABRAÃO, 2022).

O modelo matemático de um neurônio é representado pela Equação (4). Nela, o resultado é a combinação linear (u_k) dada pela soma dos pesos sinápticos (w_{kj}), de cada sinapse (j) de 1 a n , em cada neurônio (k), com cada um dos sinais de entrada (x_j).

$$u_k = \sum_{j=1}^n w_{kj} x_j. \quad (4)$$

O potencial de ativação (v_k) é a soma da combinação linear (u_k) e o termo de polarização (β_0). A polarização, agindo como uma constante, é adicionada à combinação linear e pode amplificar o sinal se for positivo ou diminuí-lo se for negativo. Este termo de polarização, considerado um parâmetro externo ao neurônio, contribui para a amplificação ou atenuação do sinal de ativação:

$$v_k = u_k + \beta_0. \quad (5)$$

A função de ativação ($\varphi(\cdot)$) está sujeita ao potencial de ativação (v_k). Existem diversas formas de funções de ativação e a Tabela 1 apresenta as mais utilizadas em RNAs (HAYKIN, 1994; TYAGI; ABRAHAM, 2022).

Tabela 1 - Principais funções de ativação ($\varphi(\cdot)$).

Função de ativação	Descrição
1. <i>Binary Step function (BSF)</i>	$\{1 \text{ se } v_k \geq 0 0 \text{ se } v_k < 0\}$
2. Função <i>Linear</i>	$\left\langle 1 \text{ se } v_k \geq +\frac{1}{2} \mid +\frac{1}{2} > v_k > -\frac{1}{2} \mid 0 \text{ se } v_k \leq -\frac{1}{2} \right\rangle$
3. <i>Tangent function (Tanh)</i>	$(\exp(v) - \exp(-v)) / (\exp(-v) + \exp(-v))$
4. Função <i>Sigmoid</i>	$1 / (1 + \exp(-av))$
5. <i>Rectified Linear Unit (ReLU)</i>	$\max(0, v)$
6. <i>Exponential Linear Unit (ELU)</i>	$\max(0.01v, v)$
7. <i>Parametric ReLU</i>	$\max(av, v)$
8. <i>Unitary Linear Exponential</i>	$\max(\alpha(\exp(v) - 1), v)$
9. <i>Swish</i>	$v / (1 + \exp(-v))$
10. <i>SoftPlus</i>	$\log(1 + \exp(v))$
11. <i>SoftMax</i>	$\exp(v) / \sum_{i=1}^n \exp(v)$
12. <i>SoftSign</i>	$v / (1 + v)$

Fonte: Adaptado de Haykin (1994) e Tyagi e Abraão (2022).

Finalmente, o sinal de saída (\hat{y}_k) ou o valor resultante é obtido pela aplicação da função de ativação com influência do viés β_0 , também interpretado como erro sistemático. O processo é o seguinte:

$$\hat{y}_k = \varphi(v_k), \quad (6)$$

ou

$$\hat{y}_k = \varphi(u_k + \beta_0). \quad (7)$$

A arquitetura de uma RNA pode variar em número de neurônios e camadas; diferentes combinações de neurônios dão origem a várias arquiteturas de RNA. (TYAGI; ABRAHAM, 2022) destacam que as tipologias podem ser categorizadas em: i) camada única – Single Layer Perceptron (*SLP*); ii) multicamada – Multi-Layer Perceptrons (*MLPs*), subdividido em Feed-forward e Deep Learning; iii) recorrente, subdividido em curto - redes de memória de longo e longo prazo – Long Short-Term Memory (*LSTM*), rede Hopfield e rede Boltzmann; iv) convolucional, subdividido em profundo e transposto; ev) funções de base radial.

Conforme Haykin (1994), o algoritmo de retropropagação de erros é uma técnica utilizada para calcular eficientemente as derivadas parciais de uma rede neural. Essas derivadas são usadas para ajustar os pesos associados ao vetor de entrada, iterando através do retorno de erro; e, assim, minimizando-o no vetor de saída e reduzindo a diferença entre a saída e a entrada. A saída do neurônio j é representada como:

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n), \quad (8)$$

onde $e_j(n)$ é o sinal de erro do neurônio (j); n é a iteração de treinamento; $d_j(n)$ é a resposta desejada para o neurônio (j) e $y_j(n)$ é o sinal de saída do neurônio (j). Para obter uma explicação detalhada do algoritmo de retropropagação de erro, consulte (HAYKIN, 1994; TYAGI; ABRAHAM, 2022).

Haykin (1994) descreve vários métodos para aprendizagem em redes neurais, incluindo i) correção de erros; ii) baseado em memória; iii) aprendizagem hebbiana; iv) aprendizagem competitiva; e v) aprendizagem de Boltzmann; supervisionado ou não. Nosso experimento se concentrará principalmente no aprendizado de correção de erros, que demonstrou capacidades promissoras na adaptação a padrões complexos e não estacionários encontrados em dados do mercado de ações.

A seguir, no Capítulo 3, são apresentados o referencial teórico-empírico e a formulação das hipóteses.

3 REFERENCIAL TEÓRICO-EMPÍRICO E FORMULAÇÃO DAS HIPÓTESES

O presente capítulo apresenta o referencial teórico-empírico que serve de base para a formulação das hipóteses teóricas desta tese. Inicialmente, são abordados aspectos gerais do uso de RNAs para prever retornos de ativos; e, por fim, é apresentado o referencial teórico da hipótese de curtose dos dados financeiros e a hipótese de eficiência de mercado.

3.1 USANDO RNAS PARA PREVER RETORNOS DE ATIVOS

No campo das finanças, a RNA retropropagação *feed-forward* atraiu atenção substancial da pesquisa por suas capacidades preditivas. Esses esforços significam a busca contínua pelo refinamento dos modelos de RNA para maior precisão e eficácia nas previsões financeiras. Exemplos como Qi, (1999) e Quah e Srinivasan (1999) demonstram a aplicação de RNA na previsão de retornos de ações em relação a índices de referência ou taxas livres de risco. Qi (1999) calculou o retorno excedente do S&P500 de 1954 a 1992, totalizando 468 observações, usando nove variáveis financeiras e econômicas americanas, incluindo Dividend Yield, Earning-Price, Tesouro de um mês, Tesouro de doze meses, taxa de inflação, razão Preço/Lucro (P/E), oferta monetária e variação nos resultados industriais. O modelo superou os modelos lineares em termos de precisão e exatidão.

A RNA foi utilizada para classificar ativos com desempenho acima ou abaixo de 5% do mercado, trimestralmente entre 1993 e 1995, em Cingapura (QUAH; SRINIVASAN, 1999). Eles selecionaram os 25 ativos com melhor desempenho em cada trimestre como variável de produção e usaram fatores de empresas financeiras como Preço/Lucro (P/E), Fluxo de Caixa, Capitalização de Mercado, percentual de desvio do retorno mediano, Retorno sobre Ativos, e valorização média dos ativos no trimestre; principalmente com metade do peso no último mês e o restante nos outros 2 meses.

A RNA também foi utilizada para analisar os valores dos índices de ações American Standard & Poor's (S&P500), Financial Times Stock Exchange FTSE100 da Inglaterra e Nikkei225 do Japão (LEUNG; DAOUK; CHEN, 2000). O estudo utiliza dados mensais que vão de 1967 a 1995, resultando em 348 meses de observação. As variáveis de entrada empregadas na análise incluíram a primeira diferença nas taxas de juros de curto prazo (3 meses), a primeira diferença nas taxas de juros de longo prazo (20 anos), os retornos excedentes defasados do índice de inflação dos países, a primeira diferença nas taxas de juros o índice de

preços ao consumidor, e a primeira diferença na taxa de produção industrial.

Kuo, Chen e Hwang (2001) apresentaram um exemplo de uso de Rede Neural Artificial de Lógica Fuzzy (FLANN) para aumentar a precisão da previsão de retorno de ativos em comparação com a abordagem ANN *Backpropagation Feed-forward*. O estudo focou no mercado de ações de Taiwan, considerando 42 variáveis de entrada, incluindo análises técnicas, durante o período de 1991 a 1997. O modelo de saída incluiu sinais de compra ou venda, bem como a avaliação do desempenho dessas decisões.

Outro estudo foi realizado demonstrando que o uso de uma RNA para selecionar as 50 ações com o maior retorno esperado produz retornos ajustados ao risco superiores em comparação com os índices S&P500 ou Dow Jones Industrial Average (DJIA) (EAKINS; STANSELL, 2003). Eles usaram dados de 1975 a 1996 e se concentraram em ativos com valor de mercado superior a US\$ 150 milhões disponíveis na Compustat. Em seguida, colocou-se as variáveis empregadas como *Market to Book (P/B)*, rendimento de dividendos, preço por ação (*P/S*), Preço por Lucro (*P/E*), Capitalização de Mercado e Preço por Fluxo de Caixa (*P/CF*).

No mercado canadense a RNA foi empregada com 61 indicadores financeiros de 2.352 empresas durante o período de 1976 a 1993 como variáveis de entrada (OLSON; MOSSMAN, 2003). Eles usaram uma abordagem de classificação para prever a probabilidade de o retorno anual de uma empresa estar acima ou abaixo da mediana da amostra no ano fiscal subsequente. Além disso, eles previram o quartil ou octal em que o retorno anual da empresa cairia no próximo ano fiscal. O estudo mostrou que as RNAs superaram a regressão logística, alcançando índices de classificação correta variando de 51 a 58% para as empresas, e gerando retornos anuais maiores, variando de 3 a 16%, dependendo se a RNA utiliza mediana, quartil ou octal.

Outros exemplos são Enke e Thawornwong (2005) que estudaram resultados de ativos previstos corretamente variando de 60 a 69,77%; Afolabi e Olude (2007) com a aplicação de RNA de Lógica Fuzzy obtendo rendimentos médios mensais mais elevados de 1,26% e 1,72% usando o sinal de rendimento previsto; Ticknor (2013) que focou na RNA Bayesiana-Regular; Rather, Agarwal e Sastry (2015) que empregou RNA recorrente; Chong, Han e Park (2017), Long, Lu e Cui (2019) e Zhong e Enke (2017) que usaram RNA de aprendizagem profunda; Selvamuthu, Kumar e Mishra (2019) que utilizaram Máquinas de Vetores de Suporte (SVM); e Delgado Et Al. (2023) com o modelo de regressão RNA implementado.

O estudo com RNA apresenta um crescimento exponencial (BAS; EGRIOGLU; TUNC, 2023; NAMETALA et al., 2023; SANTUR, 2023). Contudo, é importante notar que estas iniciativas visaram melhorar a capacidade preditiva das RNAs, não tendo como objetivo principal a criação de carteiras de investimentos.

Os estudos examinam diversas metodologias de previsão e as comparam com os retornos reais dos ativos, com foco no desempenho do método ANN *Backpropagation Feed-forward*. As avaliações também envolvem a distância entre os valores previstos e os valores reais dos retornos, utilizando métricas padrão como erro quadrático (RMSE) ou erro médio (ME).

O método ANN *Backpropagation Feed-forward* é uma das abordagens mais populares em previsão financeira devido à sua simplicidade e eficiência. Embora os estudos mencionados compartilhem propostas semelhantes pela adoção de RNAs, eles diferem quanto aos seus objetivos.

Diferentemente desses estudos que não tentam prever o retorno específico de uma empresa, Morris e Comeau (2020) analisaram os retornos mensais de 1.035 empresas canadenses entre 1994 e 2014 para prever sinais ou probabilidades de retornos excessivos em comparação ao índice da Bolsa de Valores de Toronto (TSX). Ao comparar os resultados com a aplicação tradicional de RNAs para previsão de retorno de ativos, não encontraram diferença significativa entre os métodos; no entanto, observaram retornos mensais mais elevados em comparação com o índice TSX, variando de 0,51% a 6,53%, dependendo da configuração de classificação dos ativos. E Oliveira, Ceretta e Albrecht (2023) analisaram a carteira do S&P500, de MF-DFA, de Markowitz e de Sharpe, no período de 2018 a 2022, encontrando retornos superiores gerados pelas RNAs.

Desta forma tem-se a seguinte hipótese 1:

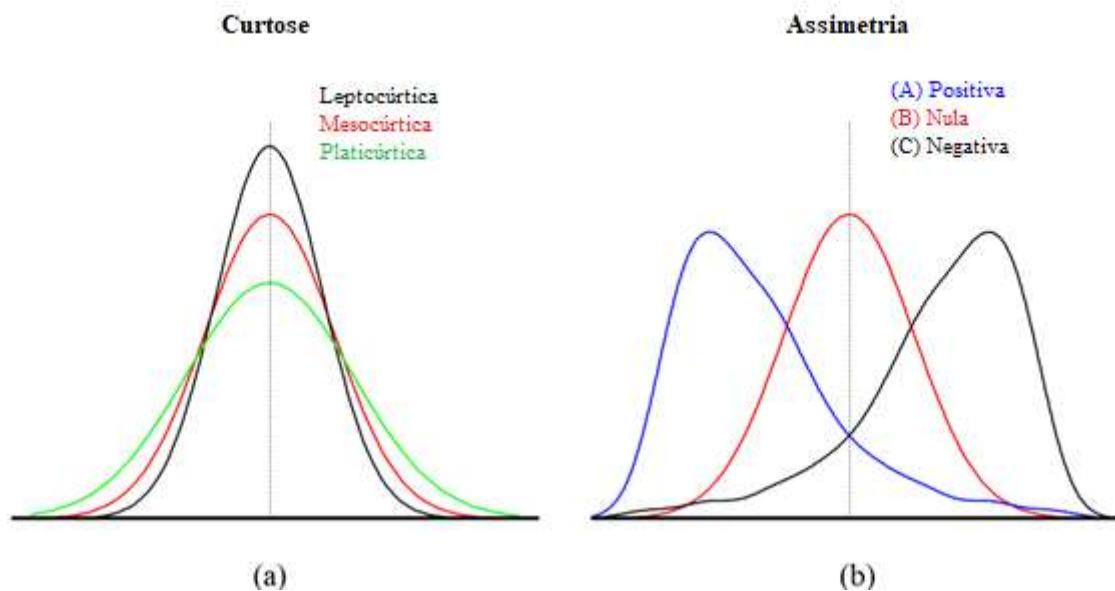
H1) É possível utilizar o poder preditivo das RNAs para montar carteiras de investimentos.

3.2 HIPÓTESE DE CURTOSE E ASSIMETRIA DE DADOS FINANCEIROS

Tradicionalmente, os trabalhos em finanças assumem que os dados estocásticos financeiros seguem uma distribuição de probabilidade gaussiana em numerosos estudos; por exemplo (BEN-HORIM, 1990). Contudo, diversas iniciativas de investigação apresentaram evidências as quais sugerem que os dados financeiros apresentam momentos superiores, particularmente curtose, numa forma leptocúrtica caracterizada por caudas longas e uma concentração de dados em torno da média, como é o caso de (BASTIANIN, 2020; RACHEV; RACHEVA-LOTOVA; STOYANOV, 2010; SHANG; TADIKAMALLA, 2004; STOYANOV et al., 2011).

A Figura 2 3(a) e 3(b) mostra a curtose e assimetria moldando a curva de distribuição, respectivamente. A curtose ou achatamento indica a nitidez ou planicidade em relação a uma distribuição gaussiana, enquanto a assimetria é um deslocamento da média (μ) em relação à mediana (Md) e à moda (Mo). Em (b), a curva A exibe assimetria positiva, indicando uma distribuição enviesada à esquerda, com ($\mu > Md > Mo$); a curva B representa distribuição simétrica ($\mu = Md = Mo$); e a curva C exibe assimetria negativa à direita, indicando uma distribuição distorcida à direita ($\mu < Md < Mo$). Porém, os investidores avessos ao risco tendem a preferir distribuições com caudas longas e finas (leptocúrticas) e assimetria positiva, onde os retornos médios excedam tanto a mediana como a moda ($\mu > Md > Mo$).

Figura 3 - Curtose e Assimetria.



Fonte: Elaboração própria (2024).

A literatura possui diversas formas de medir a curtose e a assimetria como, por exemplo, o 4º Momento e o 3º Momento relativizados pelo Coeficiente do Momento de Curtose α_4 e Coeficiente de assimetria de momento α_3 :

$$\alpha_4 = M_4/S_4, \quad (9)$$

e

$$\alpha_3 = M_3/S_3. \quad (10)$$

onde (M) são os Momentos e o Desvio Padrão (S). Em geral, define-se M_l momentos por:

$$M_l = 2 \int_0^{\infty} r_{exc_p_s(t)}^l f_{r_{exc_p_s(t)}}(r_{exc_p_s(t)}) dr_{exc_p_s(t)} \quad (11)$$

sendo M_l o l -ésimo momento absoluto (M) de ($f_{r_{exc_p_s(t)}}(r_{exc_p_s(t)})$), sobre qual é o retorno excedente esperado ($r_{exc_s(t)}$) dos ativos (s) no período (t). Para valores $\alpha_4 < 3$, a distribuição é platicúrtica; para $\alpha_4 = 3$, a distribuição é mesocúrtica, e para $\alpha_4 > 3$, leptocúrtica; para $|\alpha_3| < 0,2$, a distribuição é simetria, para $0,2 < |\alpha_3| < 1$, assimetria fraca; e para $\alpha_3 > 1$ valores, forte assimetria.

Para captar o sentido de assimetria, seja ele positivo ou negativo, é necessário obter o Coeficiente de Assimetria de Pearson (A_s):

$$A_s = (\mu - Mo)/S, \quad (12)$$

com $A_s < 0$, a distribuição possui inclinação negativa, com $A_s = 0$ a distribuição é simétrica e com $A_s > 0$ a distribuição possui inclinação positiva.

A distribuição t de *Student*, de autoria de William Sealy Gosset, Student (1908), é uma das distribuições mais comumente usadas em análise estatística. Em comparação com a distribuição gaussiana que é mesocúrtica, a distribuição t de *Student* é platicúrtica para valores pequenos de n e leptocúrtica para valores grandes, até se tornar mesocúrtica com $n = \infty$, igualando a curva de Gauss.

Na literatura, quando $n > 30$, a distribuição t de *Student* já é considerada igual à distribuição gaussiana. Porém, neste estudo, conforme explicado na seção de metodologia, a distribuição t de *Student* é utilizada como aproximação leptocúrtica. Isto porque se considera que esta aproximação pode distorcer os resultados de classificação dos ativos. Como o número de observações amostrais n é menor que o infinito, $n < \infty$, e considerando que o número de ativos analisados é grande em relação a n , qualquer diferença centesimal de probabilidade pode levar a alterações na classificação dos ativos, posto que a estimativa de risco pode ser melhorada, de forma relativa a curva de Gauss, por um fator 3m conforme Zumbach (2007), ao avaliar retornos na casa de 10^{-4} .

De acordo com Feller (1966), a função densidade $f(t)$ da distribuição t de *Student*, para cada intervalo $t \in \mathbb{R}^I$ é dado por uma linha I definida como:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi T_0} \cdot 2^{(N-1)/2} \cdot \Gamma(T_0/2)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1+t^2/T_0)z^2} z^{T_0} dz \quad (13)$$

onde T_0 é o número de observações de ativos-dia, Γ a função Gamma, $z = r_{exc_p_s(t)}$ e Γ é dado por Feller (1966) como:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty r_{exc_p_s(t)}^{t-1} e^{-r_{exc_p_s(t)}} dr_{exc_p_s(t)}. \quad (14)$$

A função de probabilidade cumulativa de um determinado valor $P(X \leq r_{exc_s(t)})$ na distribuição t de *Student* é:

$$P(X \leq r_{exc_p_s(t)}) = \int_{-\infty}^{r_{exc_p_s(t)}} f(t) dr_{exc_p_s(t)}. \quad (15)$$

A literatura existente documentou as formas para converter uma distribuição t de *Student* simétrica em uma distribuição t de *Student* assimétrica como, por exemplo, a distribuição *skew - t* de (FERNÁNDEZ; OSIEWALSKI; STEEL, 1995). Todavia, neste caso, como será apresentado na seção de metodologia, a distribuição simétrica t de *Student* é deslocada para a direita ou para a esquerda.

Dado o exposto, tem-se a segunda grande hipótese desta tese:

H2) É possível melhorar a performance das carteiras de investimentos considerando assimetria e curtose, típica em distribuição de probabilidades com caudas longas.

3.3 HIPÓTESE DE EFICIÊNCIA DE MERCADO

Desde o referencial de investimentos de Markowitz (1952) e Sharpe (1964, 1966), uma volumosa literatura surgiu com a proposta de melhorar o desempenho das carteiras de investimentos: (FERNÁNDEZ; GÓMEZ, 2007; HARLOW, 1991; JANG; PARK, 2016; MASHAYEKHI; OMRANI, 2016; SANT'ANNA; FILOMENA; CALDEIRA, 2017; SOYSTER, 1973). Todas as pesquisas citadas estão alinhadas com a Hipótese de Mercado Eficiente (EMH) o qual define que o mercado pode ser eficiente de 3 maneiras, conforme Fama

(1965, 1970): Os testes de eficiência na forma fraca estudam as informações contidas nos preços históricos, sendo os retornos independentes, e portanto, estudar os retornos passados não ajudariam a prever os retornos futuros; os testes de eficiência na forma semiforte estudam informações (além dos preços históricos) que estão disponíveis publicamente e são instantaneamente incorporadas no preço; e os testes de eficiência na forma forte consideram informações públicas e privadas instantaneamente incorporadas no preço. Assume-se que a carteira é ineficiente na forma fraca para um determinado nível de risco esperado, sendo possível a utilização dos dados históricos do mercado com ajustada previsibilidade para o futuro (ROSENBERG; REID; LANSTEIN, 2021). Assim, no presente, se pode identificar ativos que não estão sendo precificados adequadamente, mas que o mercado se corrigindo, permitirão a obtenção de retornos acima da média do mercado, produzindo o que o mercado chama de Alpha de gestão ativa.

A Hipótese de Mercado Eficiente ou *Efficient Market Hypothesis* (EMH) de Fama (1965) foi amplamente testada na literatura financeira com ênfase na aleatoriedade dos retornos dos ativos (KAPPOU; BROOKS; WARD, 2010; NASEER; BIN TARIQ, 2016; PEÓN; ANTELO; CALVO, 2019; PUERTAS et al., 2023; TITAN, 2015). A hipótese assume que as informações sobre preços passados são insuficientes para prever retornos futuros; mas, a rejeição da hipótese do caminho aleatório não é suficiente para afirmar que o mercado é ineficiente.

Entre os muitos trabalhos testando EMH, encontram-se evidências de eficiência da forma semiforte no mercado dos EUA (PESARAN E TIMMERMANN, 1995). Uma das ferramentas utilizadas na literatura para testar o EMH é o MF-DFA. O uso da análise multifractal em finanças começou em estudos econofísicos para testar o nível de eficácia da forma fraca do EMH (ARSHAD et al., 2016). Posteriormente, Tiwari, Aye e Gupta (2019) usaram o método para testar a eficiência do mercado em oito países desenvolvidos, incluindo os EUA, e dois países em desenvolvimento; e concluíram que o comportamento dos preços das ações do mercado são multifractais e persistem no longo prazo para ambos os tipos de economias.

No processo de criação do portfólio há o pioneirismo da MF-DFA, de Maciel (2021); uma técnica que continua testando a eficiência dos mercados, como o mercado de criptomoedas por Alaminos e Belén Salas (2023) e o mercado de ativos de energia limpa (CHOI et al., 2023). Por outro lado, as redes neurais artificiais possuem um rico espectro de estudos na área financeira (LI et al., 2022; MUSTAFA; LIN; KAKINAKA, 2022; ZHANG; CHU; SHEN, 2021).

Da mesma forma, o investimento em valor é amplamente reconhecido como uma das estratégias de investimento mais proeminentes do mercado. Getty (1963), Graham (1962) e Hamada (1969) são identificados como pioneiros no campo do investimento em valor, sendo Damodaran, com trabalhos como Cornell e Damodaran (2020) e Damodaran (2005) um proeminente expoente contemporâneo. Embora o investimento em valor, incluindo a estratégia de investimento de Buffett, seja amplamente reconhecido no mercado, são necessários mais trabalhos científicos para analisar os investimentos de Buffett, sendo Ziemba (2020) uma das poucas exceções notáveis. Estas abordagens centram-se na determinação do valor intrínseco das ações que difere do preço de mercado prevalecente no momento do investimento. Warren Buffett, conhecido como um dos investidores mais bem-sucedidos da história, segue esta abordagem de avaliação e tem superado consistentemente o mercado com as carteiras da Berkshire (BERKSHIRE HATHAWAY INC, 2022, 2023).

A carteira de Warren Buffett há muito é reconhecida pelo seu desempenho excepcional tanto em risco como em retorno, desafiando a hipótese de mercado eficiente ((FAHLENBRACH, 2009; GREDIL, 2022; MASSA; YADAV, 2015).

A partir do exposto, tem-se a terceira grande hipótese:

H3) Existe a possibilidade das carteiras MF-DFA, Value Investing e ANN-t superarem as carteiras clássicas (Markowitz, Sharpe e índice S&P500).

A seguir, no Capítulo 4, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente capítulo tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos realizados. Para melhor apresentação, esse capítulo é dividido em quatro seções. A seção 4.1 contempla o método utilizado na primeira etapa da pesquisa, que chamou-se de experimento. A seção 4.2 apresenta a forma de validação utilizada no experimento. A seção 4.3 elenca o procedimento teste do modelo comparando com carteira de análise de flutuação com tendência multifractal (MF-DFA) e a seção 4.4 comparando o modelo com carteiras de *Value Investing*.

4.1. DELINEAMENTO DO EXPERIMENTO COM RNA E DISTRIBUIÇÃO t DE *STUDENT*

No trabalho experimental são utilizadas redes neurais artificiais com a arquitetura Perceptron criada por Rosenblatt (1958); especialmente o tipo *Feed-forward Multilayer Perceptron* (MLP). Esta arquitetura permite que o modelo aprenda os valores ideais dos pesos sinápticos (w_{kj}) e bias (β_0), treinando nos dados de entrada e possíveis resultados fornecidos usando retropropagação.

O experimento desenvolvido é interpretado como uma extensão do trabalho conduzido por Morris e Comeau (2020) que empregam RNAs e probabilidades de classificação no processo de criação do portfólio. Nele, conduz-se experimentos usando diversas configurações de modelos *Backpropagation Feed-forward* de RNA, onde modifica-se parâmetros como β_0 , as funções de ativação ($\varphi(\cdot)$), o erro máximo aceitável ($\varepsilon = 0,01$) e o número de repetições ou padrões de treinamento (conhecidos como época ou $Stepmax=2.000$ e 5.000), delimitando a convergência da RNA. Para minimizar o problema de *overfitting*, utilizamos a técnica de aprendizagem ensemble, conforme Sollich e Krogh (1995), ou sistema de múltiplos classificadores, combinando a saída de diversas redes neurais especializadas em cada ativo com o objetivo de melhorar a resposta global do sistema, o que justifica a enorme quantidade de RNAs geradas. A novidade desta abordagem reside no critério de classificação dos ativos, o qual incorpora a utilização da distribuição leptocúrtica assimétrica ajustada (distribuição t de *Student*), além da classificação tradicional baseada em sinais.

Como mencionado no primeiro capítulo, o principal objetivo do estudo é formar carteiras constituídas por ativos utilizando probabilidades previstas de retornos excedentes gerados pelas RNAs em comparação com o retorno de mercado calculado. O treinamento da

RNA gera retornos excedentes esperados como variável resposta para um período ($r_{exc_p_s(t)}$), em que a probabilidade de ser maior que o retorno do índice S&P500 ($P(r_{exc_p_s(t)} > R_{SP500})$) é calculada. Esta probabilidade é determinada com base na taxa de frequência numa distribuição t de *Student*, dado por $P(r_{exc_p_s(t)} > 0) = 1 - P(r_{exc_p_s(t)} \leq 0)$. Além do objetivo principal, este estudo visa comparar os resultados obtidos com os resultados da carteira de variância mínima de Markowitz (1952) e com os resultados do método de classificação de sinais desenvolvido (MORRIS; COMEAU, 2020).

A principal contribuição do método reside na classificação das ações segundo probabilidades leptocúrticas assimétricas mais representativas da natureza estocástica dos dados financeiros. Essa classificação é realizada utilizando o poderoso poder preditivo das RNAs e a inclusão de ativos s (ações) com maior probabilidade de retornos excedentes na carteira de investimentos e, também, com os retornos esperados da carteira ajustados ao risco, $E(R_{portfolio})_{Aj}$.

Este experimento envolve a construção de um modelo utilizando uma amostra piloto ou de modelagem, o qual é posteriormente validado através de uma amostra mais robusta; ambas as amostras consistem em subgrupos de treinamento e teste. De acordo com um projeto experimental de Kelinger e Taylor (1979), o pesquisador manipula e controla uma ou mais variáveis independentes enquanto observa a variação da variável dependente.

O foco do nosso experimento não está na manipulação dos preços dos ativos p_s ou de seus retornos r_s ; mas, sim, experimentando configurações de modelo para obter desempenho superior em comparação ao benchmark S&P500 e ao portfólio Markowitz. Isto envolve a criação de duas RNAs com variações em cinco fatores de configuração - ($fA, fB, fC, fD, e fE$). O fator A (fA) pertence ao número de épocas ou repetições (2.000 e 5.000 épocas). O Fator B (fB) envolve duas formas de classificação: classificação por sinal e classificação baseada na probabilidade de distribuição t de *Student*. O Fator C (fC) considera duas amostras distintas, a amostra de modelagem e a amostra de validação. O Fator D (fD) envolve a mudança de referência, carteira S&P500 e carteira de variação mínima. E o Fator E (fE) concentra-se em duas distribuições de pesos de ativos das carteiras com pesos igualmente distribuídos e pesos de mínima variância. Cada um dos 5 fatores possui 2 níveis - experimento fatorial 2^5 ; inicialmente em uma amostra piloto de 70 ativos, com 30.520 observações ativos-dia, posteriormente validada na amostra de 503 ativos, com 555.170 observações ativos-dia.

Para a construção do modelo experimental foi utilizada uma carteira com 70 ativos (s_i), com $i = (1, \dots, 70)$, selecionados de duas fontes: 52 do portfólio Standard & Poor's (S&P500)

do S&P Dow Jones Índices e 15 do mercado de ações brasileiro no Brasil, Bolsa e Balção [B]³. Além disso, usou-se commodities agrícolas de soja e milho negociadas na *Chicago Board of Trade* (CBOT) e uma criptomoeda *bitcoin* negociada na *National Association of Securities Dealers Automated Quotations* (Nasdaq).

Todos os dados de ativos financeiros foram obtidos do Yahoo *Finance*; e, a partir desses dados calculou-se o retorno das ações (r_s) de forma discreta com a utilização do preço de fechamento dos ativos (p_s), por $(r_{s(t)} = (p_{s(t)} - p_{s(t-1)})/p_{s(t-1)})$. Os dados utilizados abrangem o período de 20 de setembro de 2020 a 14 de julho de 2022, num total de 436 preços de fechamento dos ativos ($p_{s(t)}$), com $t \in T = (1, \dots, 436)$. Para o tratamento dos dados utilizou-se o Software R por meio do roteiro customizado e elaborado conforme apresentado no estudo (Apêndice A).

O conjunto de dados é dividido em dois subgrupos: um grupo de treinamento que abrange o período de 23 de setembro de 2020 a 30 de dezembro de 2021, e um grupo de teste que abrange o período de 3 de janeiro de 2022 a 14 de julho de 2022. O resultado forma dois bancos de dados com duração de 307 dias para amostra de treinamento ($T_r = 307$) e 129 dias para amostras de teste ($T_e = 129$).

Cada ativo é submetido a uma Rede Neural Artificial fazendo com que 70 RNAs obtenham a previsão do excesso de retorno dos ativos no período ($r_{exc_p_s(t)}$). Essas RNAs são construídas conforme Equação (16). A variável dependente é o excesso de retorno diário de cada ativo ($r_{exc_p_s(t)}$) em relação ao retorno da carteira Benchmark S&P500 (R_{SP500}). As variáveis independentes incluem um dia de defasagem nos retornos do S&P500 ($R_{SP500(t-1)}$) e o excesso de retorno defasado do próprio ativo, $r_{exc_s(t-dn)} = r_{s(t-dn)} - R_{SP500(t-dn)}$, com defasagem variando de 1 a 5 dias, $dn = (-5, \dots, -1)$:

$$r_{exc_p_s(t)} = \varphi\left(\sum_{k'j=1}^{307} w_{k'j} x_{Hk'j} + \beta_0'\right), \quad (16)$$

ou

$$r_{exc_p_s(t)} = \varphi\left\{\sum_{k'j=1}^{307} w_{k'j} \left[\varphi'\left(\begin{array}{l} w_{1j}R_{SP500(t-1)} + w_{2j}r_{exc_s(t-1)} + w_{3j}r_{exc_s(t-2)} \\ + w_{4j}r_{exc_s(t-3)} + w_{5j}r_{exc_s(t-4)} + w_{6j}r_{exc_s(t-5)} \\ + \beta_0 \end{array}\right)\right] + \beta_0'\right\}. \quad (17)$$

φ é a função de ativação da camada de saída, w_{kj} é o peso sináptico da informação j no neurônio k , β_0 é o bias da camada de entrada, $x_{Hk'j}$ é a camada oculta com 307 neurônios

ocultos $k'j$, φ' é a função de ativação da camada oculta e β_0' é o bias da camada oculta. A seleção do número de defasagens não depende de um critério de informação; em vez disso, é preferível padronizar o comprimento da série defasada para todos os ativos (s), já que cada ativo resultaria em um critério de informação diferente, tornando o procedimento computacionalmente muito demorado.

A arquitetura utilizada nas RNAs possui 6 neurônios de entrada ($x_{1j}, j = (R_{SP500(t-1)}, r_{exc_s(t-1)}, r_{exc_s(t-2)}, r_{exc_s(t-3)}, r_{exc_s(t-4)}, r_{exc_s(t-5)})$) correspondente às variáveis independentes da equação (17); uma camada oculta $x_{Hk'j}, k'j = (1, \dots, 307)$ – com o número de neurônios igual ao comprimento da série, formando uma matriz quadrada na camada oculta (número de observações ativos-dia, s_t, T_r , igual ao número de neurônios ($x_{Hk'j}(T_r = x_{Hk'j} = 307)x_s$). Aqui, o superajuste é desejado, pois qualquer milésima diferença no retorno dos ativos altera a sua classificação e conseqüentemente o desempenho da carteira de investimentos formada. A camada de saída possui apenas uma saída, a previsão do retorno excessivo dos ativos ($r_{exc_p_s(t)}$).

O modelo selecionado *Forward-Backward Propagation* do Perceptron é calculado por dois algoritmos:

- 1) O primeiro algoritmo emprega o pacote NeuralNet *do software* R (NNet), (FRITSCH et al., 2019). Ele é configurado com polarização (β_0 e β_0') e função de ativação tangente hiperbólica ($\varphi(Tanh)$) para a camada oculta e de saída. As variáveis são restritas a 2.000 épocas e um erro máximo de 0,01.
- 2) O segundo algoritmo é programado manualmente pelos pesquisadores – criado manualmente (MC). Configurou-se o segundo algoritmo sem viés (β_0 e β_0'), com uma função de ativação tangente hiperbólica ($\varphi(Tanh)$) na camada oculta e sigmoide ($\varphi(Sigmoid)$) na camada de saída. As variáveis são restritas às épocas de 2.000, apenas para avaliação do modelo eficiência.

Os retornos excessivos previstos do modelo ($r_{exc_p_s(t)}$) são comparados com os retornos excedentes reais ($r_{exc_s(t)}$) usando a simples diferença ou erro (ε) entre os valores ($\varepsilon = r_{exc_p_s(t)} - r_{exc_s(t)}$).

Ambas as RNAs (NNet e MC) geram retornos excessivos previstos de ativos (s), ($r_{exc_p_s(t)}$). Realizou-se dois procedimentos simultâneos nas predições de cada RNA. O primeiro procedimento envolve a classificação dos retornos por Sign - (S^+ ou S^-), assumindo valor “1” se a previsão de retornos excessivos do ativo ($r_{exc_p_s(t)}$) é positivo (+) e valor “0”

se a previsão do excesso de retornos dos ativos ($r_{exc_p_s(t)}$) é negativo (-).

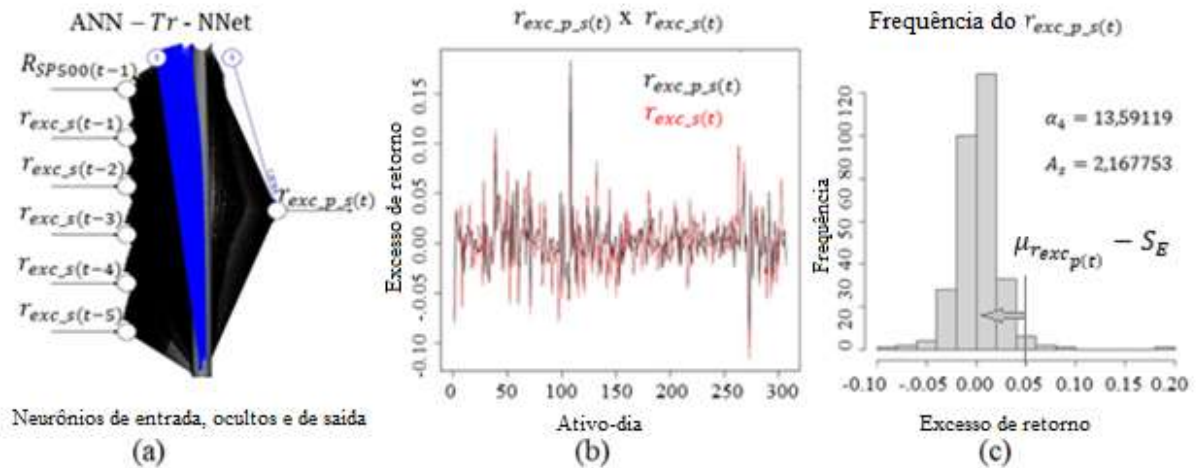
O segundo procedimento envolve a construção do histograma de frequência, o cálculo dos coeficientes de curtose (α_4) e assimetria (A_3); e, ainda, determinar a função de distribuição de probabilidade t de *Student* considerando uma curtose $\alpha_4 > 3$. Na presença de assimetria ($A_3 \neq 0$) dentro da distribuição de probabilidade, as correções são feitas usando o erro padrão (S_E), onde $S_E = S/\sqrt{n}$.

No total, são geradas 2.240 RNAs conforme indicado na Equação (17):

$$n^{\circ} ANN = 2[Tr + Ts]. 2[NNet + MC]. (70 + 490)[s]. \quad (18)$$

Nesta equação, duas RNAs, Treinamento (Tr) e Teste (Ts), são multiplicadas por 2 dois algoritmos, o NeuralNet (NNet) e o Criado Manualmente (MC); os quais também são multiplicados pelos ativos totais (s), com 70 ativos em fase de modelagem e 490 ativos em fase de validação. A RNA e os procedimentos a ela aplicados estão exemplificados na Figura 4.

Figura 4 - (a) Rede Neural Artificial com camada oculta, fase de treinamento (Tr) do algoritmo *NNet*. (b) Comparação dos retornos excedentes previstos ($r_{exc_p_s(t)}$) versus retornos excedentes reais ($r_{exc_s(t)}$). (c) Distribuição de probabilidade de retornos excedentes ($r_{exc_p_s(t)}$) com cálculo dos parâmetros de curtose e assimetria.



Fonte: Elaboração própria (2024).

Na Figura 4(a) a RNA de tratamento é gerada utilizando o pacote NeuralNet (NNet), com os 6 neurônios de entrada (X_{Ei}), os 307 neurônios da camada oculta (X_{Ocj}), e o neurônio de saída (X_{Sj}). A Figura 4(b) mostra a comparação entre os retornos excedentes previstos

($r_{exc_s(t)}$) e os retornos excedentes reais ($r_{exc_s(t)}$) para o(s) ativo(s) específico(s); neste caso, o ativo utilizado é Tesla Incorporation (TSLA). A Figura 4(c) mostra o histograma de frequência, com o coeficiente de momento de curtose ($\alpha_4 = 13,59119$) e o coeficiente de assimetria de Pearson ($A_s = 2,167753$), mostrando que a distribuição do ativo é leptocúrtica e assimétrica à esquerda (positiva). Em termos da distribuição de probabilidade de retornos para cada ativo (s), a Figura 4(c) mostra a aplicação da correção assimétrica à distribuição usando o erro padrão (S_E). Esta correção envolve o deslocamento da média esperada pelo nível de confiança do erro ($P(r_{exc_p_s(t)} > 0)$) considerando a assimetria identificada.

Ou seja, se a assimetria for positiva, a distribuição de probabilidade t de *Student* é deslocada do seu centro original descontando o erro padrão (S_E), ($\mu_{r_{exc_p(t)}} - S_E$). Por outro lado, se a assimetria for negativa, a distribuição de probabilidade t de *Student* é deslocada do seu centro original pela adição de ($\mu_{r_{exc_p(t)}} + S_E$).

Depois de calcular a probabilidade ($P(r_{exc_p_s(t)} > 0)$) para todos os ativos, essas probabilidades são armazenadas em uma matriz ($A_{ij}, i = 1, j = 490$), (1×490) e dispostos em ordem decrescente com base na probabilidade de retornos positivos ($P(r_{exc_p_s(t)} > 0)$). Este arranjo é realizado separadamente para o primeiro tratamento *Tr* (classificação por sinal ((S^+ ou S^-)) e para o segundo tratamento *Ts*, utilizando a distribuição t de *Student* para as duas RNAs geradas. O objetivo é definir os ativos que irão compor a carteira (Pf).

A inclusão de ativos na carteira de investimentos (Pf) é determinada pela ordem da probabilidade de retornos excessivos positivos ($P(r_{exc_p_s(t)} > 0)$).

Na amostra de treinamento (*Tr*) 50 carteiras de investimentos (Pf) são montadas de 1 a 50 ativos. Para cada portfólio (Pf), os cálculos incluem: 1) o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = \sum_{t=1}^T r_{Pf,t} / T$; 2) o retorno esperado ajustado ao risco (variância), $E(R_{Pf})_{Aj} = R_{Pf} / \sigma_{Pf}^2$; 3) o retorno esperado ajustado por Sharpe que desconta a taxa livre de risco Rf no ajuste, $E(R_{Pf})_{Sharpe} = (R_{Pf} - Rf) / \sigma_{Pf}^2$; e 4) o retorno esperado acumulado $E(RA_{Pf}) = (1 + R_{Pf})^T$. Os cálculos cobrem o período de 23 de setembro de 2020 a 30 de dezembro de 2021; os pesos atribuídos aos ativos são determinados como ($1/N$), onde N é a quantidade de ativos (s); e, adicionalmente, para as distribuições t de *Student* de probabilidade das previsões (NNet) e (MC) são geradas outras duas carteiras de investimentos (Pf), utilizando os pesos (w_s) obtidos pela abordagem de variância mínima de Markowitz (*Mkv*).

Os resultados de desempenho $E(R_{Pf})$, $E(R_{Pf})_{Aj}$, $E(R_{Pf})_{Sharpe}$ e $E(RA_{Pf})$ para cada

carteira de investimentos (Pf) são ainda comparados com o desempenho do índice de referência S&P500 (R_{SP500}); e, complementarmente, analisou-se o desempenho do retorno da Carteira Markowitz (R_{Mkv}) aplicado a todos os ativos do índice S&P500. Nesta comparação foram utilizadas até sete técnicas para gerar carteiras de forma diferente para comparar com a oitava carteira: 1) C_M_S - Carteira MC ANN classificada por sinal (S^+ ou S^-); 2) C_M_T - Portfólio MC ANN com distribuição t de Student; 3) NNet_S - Carteira NNet ANN classificada por sinal; 4) NNet_T - Portfólio de RNAs NNet com distribuição t de Student; 5) NNet_T_M - Portfólio de RNAs NNet com distribuição t de Student e pesos Markowitz w_s ; 6) C_M_T_M - Portfólio de RNAs NNet com distribuição t de Student e pesos Markowitz w_s ; 7) Markov - Carteira Markowitz aplicada a todos os ativos S&P500; e 8) S&P500 Portfólio.

A forma de obtenção das carteiras está sintetizada na Tabela 2; em que \nexists (não existe) bias β_0 e β_0' nas RNAs; $\exists!$ (existe) somente um único bias β_0 e β_0' ; e w são os pesos dos ativos s na carteira. A carteira de mínima variância está sujeita à restrição $\sum_{s=1}^N W_i = 1$, onde s é de 1 a N ativos; $\sigma_p^2 = W^T \Phi W$ é a variância da carteira, e T é o período total analisado.

Tabela 2 - Técnicas de geração de carteiras utilizadas no experimento da seção 4.1.

Carteira	Equação	Fonte
C_M_S	$S^{+/-} = \nexists(\beta_0 \& \beta_0') : \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ se } P(r_{s(t)} R_{SP500(t)}) > 0,5 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{array} \right\} w^{-1}$	Adaptado de (MORRIS; COMEAU, 2020)
C_M_T	$P(r_{exc_p_s(t)} > 0) = \nexists(\beta_0 \& \beta_0') : \{P(r_{exc_p_s(t)} 0) > 0,5\} w^{-1}$	Própria
NNet_S	$S^{+/-} = \exists!(\beta_0 \& \beta_0') : \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ se } P(r_{s(t)} R_{SP500(t)}) > 0,5 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{array} \right\} w^{-1}$	Adaptado de (MORRIS; COMEAU, 2020)
NNet_T	$P(r_{exc_p_s(t)} > 0) = \exists!(\beta_0 \& \beta_0') : [P(r_{exc_p_s(t)} 0) > 0,5] w^{-1}$	Própria
Nnet_T_M	$P(r_{exc_p_s(t)} > 0) = \exists!(\beta_0 \& \beta_0') : [P(r_{exc_p_s(t)} 0) > 0,5] \min_w [\sigma_p^2]$	Própria
C_T_M_M	$P(r_{exc_p_s(t)} > 0) = \nexists(\beta_0 \& \beta_0') : [P(r_{exc_p_s(t)} 0) > 0,5] \min_w [\sigma_p^2]$	Própria
Markov	$\min_w [\sigma_p^2] = \min_w [W^T \Phi W]$	(MARKOW ITZ, 1952)
S&P500	Market Value das 500 maiores empresas (NYSE, NASDAQ)	(HUDAK, 2022)

Fonte: Elaboração própria (2024).

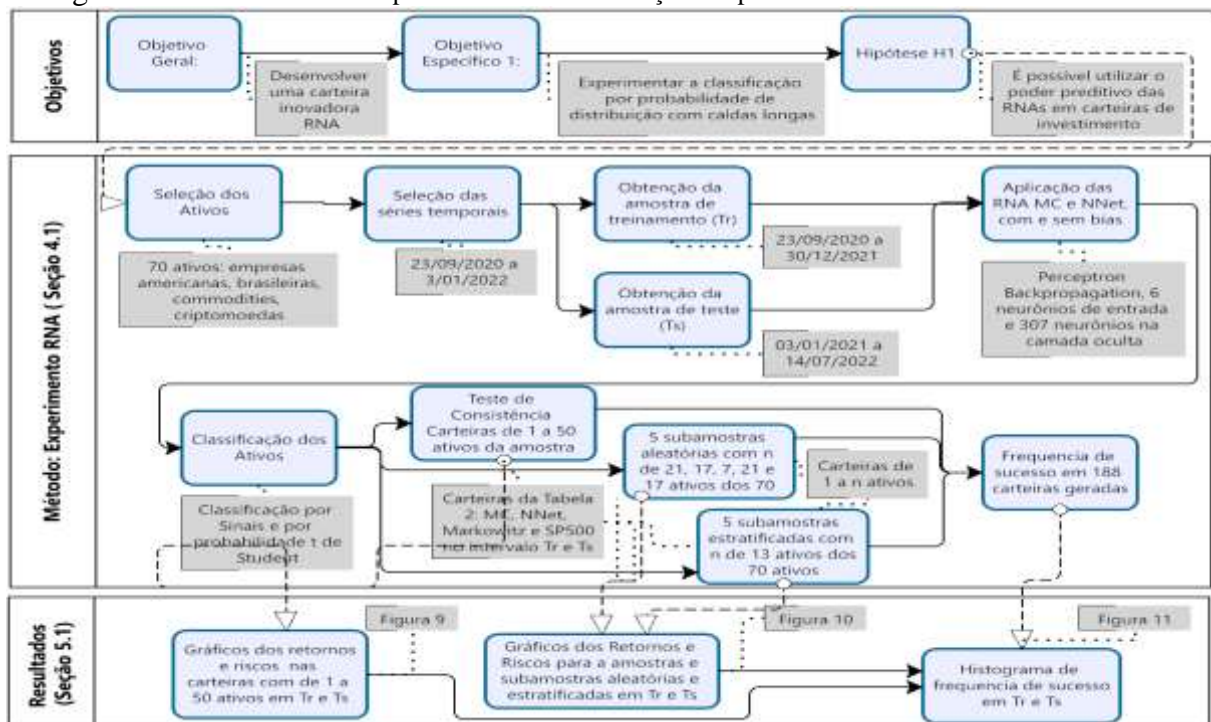
Os pesos do treinamento (T_r) RNAs são utilizados na amostra de teste (*backtest*) durante o período de 3 de janeiro de 2022 a 14 de julho de 2022 para gerar previsões de retornos excedentes neste período, $r_{exc_p_s(t)}$. Posteriormente, as novas probabilidades de os retornos excedentes serem positivos, $P(r_{exc_p_s(t)} > 0)$, são calculadas utilizando a classificação por sinal (S^+ or S^-) e a distribuição de probabilidade t de *Student*.

Para aumentar a consistência da análise dos resultados, aplica-se o teste t da diferença de médias e análise de variância (ANOVA) entre todas as carteiras da subamostra e a amostra de 70 ativos, tanto para o Treinamento (T_r) quanto para o Teste (T_s). A amostra é subdividida em 5 subamostras aleatórias e 5 subamostras estratificadas. As 5 subamostras aleatórias foram geradas com ativos aleatórios e comprimentos aleatórios, resultando em 21, 17, 7, 21 e 17 ativos; já as 5 subamostras estratificadas baseiam-se nas ponderações dos ativos (w_s) no índice de referência S&P500. Cada subamostra estratificada compreendeu 13 ativos, resultando em 188 carteiras de investimentos (Pf) diferentes sendo testadas. As carteiras variaram de 1 a 50 ativos e foram avaliadas por meio de amostra e subamostras piloto.

O processamento do modelo experimental, utilizando um notebook convencional Lenovo Corel i7 com 8Gb de memória e HD convencional, levou 3 horas e 10 minutos.

A Figura 5 representa o delineamento do experimento descrito nesta seção 4.1. Ela

Figura 5 - Delineamento do experimento descrito na seção 4.1 para desenvolver uma carteira inovadora.



Fonte: Elaboração própria (2024).

estabelece as conexões entre os objetivos, o método e os resultados; indicando o local em que os resultados da aplicação do método são apresentados na tese.

4.2 MÉTODO DE VALIDAÇÃO DO EXPERIMENTO

A validação da eficiência da metodologia do experimento apresentado se deu por meio do teste de replicação das carteiras geradas com os modelos RNAs descritos na Tabela 2, utilizando os preços de fechamento ($p_{s(t)}$) de todas as empresas pertencentes ao S&P500 – *Standard & Poor's* do S&P *Dow Jones* Índices (503 ativos) em julho de 2022. Os dados abrangem o período a partir de 10 de janeiro de 2018 até 12 de julho de 2022 com exclusão de 13 ativos que não participaram do período analisado, resultando em 1.133 observações ativos-dia ($t \in T = (1, \dots, 1133)$). Expandir a quantidade de dados reduz o problema de *overfitting* (YING, 2019).

Subdividimos a amostra em amostra de treinamento (T_r) e amostra de teste (T_s) (*backtest*). A amostra de treinamento (T_r) corresponde ao período de 10 de janeiro de 2018 a 17 de janeiro de 2020 e a amostra de teste (T_s) começa em 20 de janeiro de 2020, data do primeiro dia de registro de óbito por Covid nos EUA, e se estende até 12 de julho de 2022. Escolhemos intencionalmente esta data de corte para a série contabilizar a Covid e nos permitir testar o desempenho do modelo em presença de condições de choque externo.

Em cada um dos 490 ativos (s) aplicou-se redes neurais artificiais usando um conjunto de dados de 509 observações de ativos-dia ($T_{Tr} = 1, \dots, 509$) de excesso de retorno ($r_{exc_s(t)}$) na amostra de treinamento (T_r) e 624 observações de ativos-dia ($T_{Ts} = 1, \dots, 624$) na amostra de teste (T_s), totalizando 490 RNAs que correspondem ao número de ativos na amostra de modelagem.

Na amostra de teste (T_s) (*backtest*) utilizou-se os pesos (w_s) das RNAs obtidas na amostra de treinamento (Tr) para gerar as previsões dos retornos ($r_{exc_p_s(t)}$) e as probabilidades de classificação foram calculadas empregando o sinal (S^+ ou S^-) e a distribuição t de *Student*; e, além disso, aumentou-se o número de épocas para 5.000 considerando o erro máximo de 0,01 para ampliar a precisão das previsões.

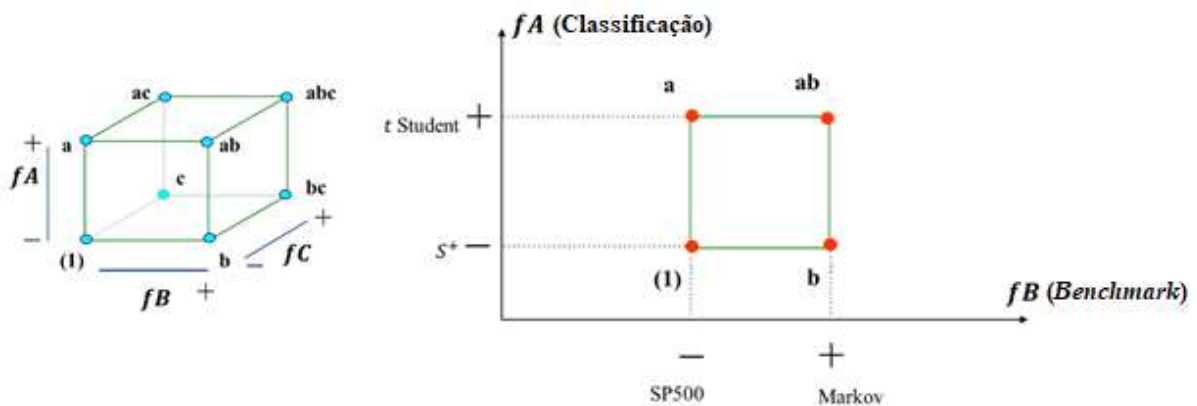
Visando dar mais consistência à análise dos resultados da amostra S&P500 subdividiu-se em subamostras as amostras de treinamento (T_r) e amostras de teste (T_s); as quais implicaram na criação de 5 amostras aleatórias com o comando *random* do *software* R, cada uma composta por 97, 90, 93, 103 e 90 ativos (s). Os ativos e tamanhos específicos das carteiras foram gerados

aleatoriamente; e as 5 subamostras estratificadas categorizou-se de acordo com o peso dos ativos (w_s) no índice de referência S&P500, cada um com 98 ativos (s) que formavam outras 550 carteiras de investimentos testadas para validação do processo, com composição variando de 1 a 50 ativos (s) e maior probabilidade de excesso de retorno entre os 98 ativos estratificados (s) em cada uma das 5 subamostras.

Durante a fase de validação do modelo, o tempo de processamento computacional na mesma máquina utilizada para modelagem foi de duração ininterrupta de 6 dias e 14 horas. Considerando apenas as RNAs antes da classificação e geração das 550 (Pf) carteiras de investimentos, foi necessário um esforço computacional de 81.996.600.000 ou 81,99 bilhões de cálculos ou sinapses neurais.

Conforme exemplificado na Figura 6, para avaliar os resultados do experimento calculou-se o efeito de cada fator ($ef(F)$), $F = (fA, fB, fC)$, de forma fracionária, onde a, b e c são níveis de fatores e ab, ac, bd e abc são combinações de níveis de fatores.

Figura 6 - Exemplificação da redução da análise dos Efeitos de forma fracionada para o 2^{5-p} Experimento Fatorial.



Fonte: Elaboração própria (2024).

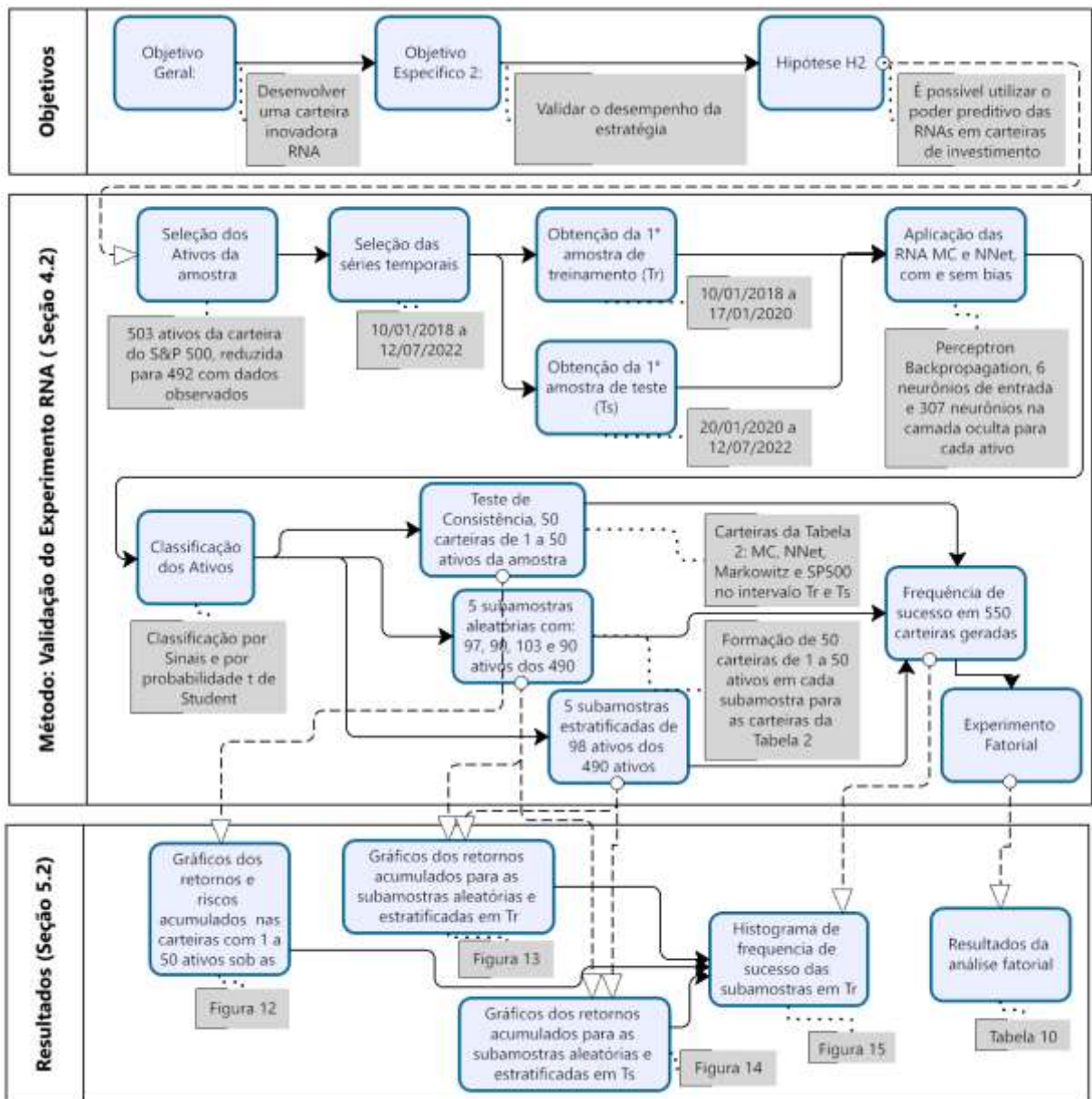
Para simplificar os resultados apresentados, realizou-se o experimento em frações, evitando o efeito de aliases ou confusão entre os efeitos, com resolução tipo III; ou seja, os efeitos principais não se confundem entre si e, sim, com os efeitos das interações de segunda ordem que podem ser confundidos entre si, (MONTGOMERY, 2013), conforme mostrado na Figura 6. A determinação define o efeito de cada fator:

$$ef(fB) = \bar{fA}_{B+} - \bar{fA}_{B-}, \quad (19)$$

onde $(\overline{fA_{B+}})$ é a média do fator (fB) no nível $(B+)$, $(\overline{fA_{B+}} = (t Student_{Markov} - S^+_{Markov})/2)$; e $(\overline{fA_{B-}})$ é a média do fator (fB) no nível $(B-)$, $(\overline{fA_{B-}} = (t Student_{SP500} - S^+_{SP500})/2)$.

A Figura 7 representa o delineamento do experimento descrito nesta seção 4.2. Ela apresenta as conexões entre o objetivo geral e específico 2 com o método empregado, e em que local da tese são apresentados os resultados da validação do experimento.

Figura 7 - Delineamento do procedimento de validação do experimento descrito na seção 4.2.



Fonte: Elaboração própria (2024).

4.3 TESTE DO MODELO COMPARANDO COM CARTEIRA DE ANÁLISE DE FLUTUAÇÃO COM TENDÊNCIA MULTIFRACTAL

No teste do modelo comparando com carteiras MF-DFA foram utilizados preços de fechamento ajustados de 10 de janeiro de 2018 a 12 de julho de 2022 para cada um dos ativos pertencentes ao índice S&P500, que representa 491 ativos (559.249 datas de observação no total em todas as ações). Os dados foram coletados no Terminal Bloomberg e tratados no software R, conforme apêndice A.

A amostra foi dividida em um período de treinamento e teste, de 10 de janeiro de 2018 a 20 de janeiro de 2020 e de 21 de janeiro de 2020 a 12 de julho de 2022, respectivamente; sendo a data limite escolhida propositalmente por se referir ao surto do vírus Covid-19 nos EUA (ALBULESCU, 2021). Em seguida, criou-se quatro tipos de carteiras de acordo com a quantidade de ativos incluídos – carteiras com cinco, dez, quinze e vinte ativos. Com o intuito de comparar o desempenho dos métodos propostos, construímos carteiras com pesos de variância mínimos e índice de Sharpe máximo na abordagem MF-DFA; e, depois, formou-se carteiras com pesos de variância mínimos e índice de Sharpe máximo no método RNA-t. Logo após, é feita uma comparação das carteiras geradas com a carteira indexada ao S&P500, a carteira Markowitz e a carteira máxima de Sharpe. A Tabela 3 traz as equações dos modelos utilizados para montagem das carteiras.

A carteira S&P500 é composta pelas 500 maiores empresas negociadas na NYSE e NASDAQ, onde excluímos todas as empresas que não foram negociadas durante todo o período. A carteira de mínima variância está sujeita à restrição $\sum_{s=1}^N W_s = 1$, onde s é de 1 a N ativos; $\sigma_p^2 = W^T \Phi W$ é a variância da carteira; T é o período total analisado (149 dias para a amostra de teste); e ϕ é a matriz de covariância de ordem $N \times N$. A carteira máxima de Sharpe tem restrições dadas por $\sum_{s=1}^N W_s = 1$. $R_p = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$ que é o vetor médio de retornos de ativos. O portfólio de Sharpe enfatiza o valor maximizado do retorno em relação ao risco.

Na carteira *Multifractal Trendless Fluctuation Analysis* (MF-DFA) ou simplesmente (MF), $y_v(t)$ é a primeira diferença entre o valor observado do Retorno (r_s) e do Retorno Médio (\bar{r}_s) do ativo (s). Para cada subintervalo $[v = 1, \dots, 2T_s]$ onde T é o número de observações; $F^2(s, v)$ a variância estimada para $v = 1, \dots, T_s$ e $v = T_s + 1, \dots, 2T_s$; e $F_q(s)$ a função de flutuação de ordem q . O Expoente de Hurst ($h(q)$) é usado para calcular a Medida de Deficiência de Mercado (*MDM*); quanto menor o valor *MDM*, mais eficiente é considerado o mercado. O *MDM* é utilizado para classificar os ativos que irão compor a carteira MF-DFA

(HURST, 1951).

Em portfólios de redes neurais artificiais, o resultado u_k é uma combinação linear dada pela soma dos pesos sinápticos dos k neurônios com cada uma das entradas; assim, u_k é uma combinação linear da ponderação de cada peso w_{kj} com a variável de entrada ou sinal de entrada x_j . Para ampliar o sinal de ativação, adiciona-se a constante viés β_0 à combinação linear resultante u_k , parâmetro externo ao neurônio, aumentando o sinal produzido se positivo, ou o observado se negativo. Em suma, isso é chamado de potencial de ativação v_k , o qual é então

Tabela 3 - Equações para geração dos portfólios comparados.

Portfólio	Equação	Referência
SP500	<i>Market Value</i> (NYSE, NASDAQ)	Hudak (2022)
Markowitz	$\min_W [\sigma_p^2] = \min_W [W^T \Phi W]$	Markowitz (1952)
Sharpe	$\max_W [SR_p] = \max_W \frac{W^T R_p - r_f}{\sqrt{W^T \Phi W}}$	Sharpe (1966)
MF-DFA	$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s \{y[(v-1)s+t] - y_v(t)\}^2$ $F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s \{y[T - (v - T_s)s + t] - y_v(t)\}^2$ $F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2T_s} \sum_{v=1}^{2T_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q}$ $MDM = \frac{1}{2} (h(q_{min}) - 0,5 + h(q_{max}) - 0,5)$	Ali et al. (2018) Tiwari, Aye e Gupta (2019) Maciel (2021)
ANNt	$u_k = \sum_{j=1}^k w_{kj} x_j$ $v_k = u_k + \beta_0$ $\hat{y}_k = \varphi(v_k)$ $e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$ $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dx$	Student (1908) Mcculloch e Pitts (1943) e Hebb (1949)

Fonte: Elaboração própria (2024).

mantido pela função de ativação $\varphi(\cdot)$; onde \hat{y}_k é o sinal de saída ou resultado (probabilidade

de retorno superior ao desempenho do benchmark); $e_j(n)$ o sinal de erro do neurônio j ; n a iteração de treinamento; $d_j(n)$ a resposta desejada para o neurônio j ; e $y_j(n)$ o sinal de saída do neurônio j . A função de probabilidade cumulativa ($f(t)$) de um determinado valor $P(X \leq x)$ na distribuição t de *Student* é então inevitável para cada ativo, sendo ordenados do maior para o menor para a formação das carteiras.

A partir de uma classificação dos retornos excedentes dos ativos previstos pelas RNAs, à qual adicionou-se a probabilidade t de *Student* superar o S&P500 (ANN- t), calculou-se a assimetria e a curtose de cada série de retornos excessivos, deslocando a curva de probabilidade média pelo erro padrão em direção à assimetria mostrada. Com isso, a abordagem atual da RNA foi estendida em função da capacidade do conceito de retornos assimétricos em mitigar o risco negativo (RACHEV; RACHEVA-LOTOVA; STOYANOV, 2010). A Tabela 4 resume as carteiras que foram montadas a partir da combinação dos métodos mostrados na Tabela 3: as carteiras S&P500, Markowitz e Sharpe, duas carteiras MF-DFA e duas carteiras ANN- t . As carteiras Markowitz e Sharpe são otimizadas em toda a amostra de 491 ativos.

Tabela 4 - Portfólios comparados e o número de ativos considerados nas amostras.

Portfólio	Descrição	Amostra
SP500	Portfólio S&P500	491
Markowitz	Portfólio de mínima variância (Markowitz) aplicado a todos os ativos da amostra	491
Sharpe	Portfólio de máximo Sharpe aplicado a todos ativos da amostra	491
MF_Mkw	Portfólio Multifractal com o menor <i>MDM</i> e pesos de mínima variância	491*
MF_Sharpe	Portfólio Multifractal com menor <i>MDM</i> e pesos de máximo Sharpe	491*
ANN-t_Mkw	Portfólio ANN com maior probabilidade t de <i>Student</i> e pesos de mínima variância	491*
ANN-t_Sharpe	Portfólio ANN com maior probabilidade t de <i>Student</i> e pesos de máximo Sharpe	491*

*Usou-se 491 ativos, mas forçou-se o portfólio escolher 5, 10, 15 e 20 ativos.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A validação do estudo se deu por meio da aplicação do *backtesting* tradicional de retorno

e risco, conforme Tabela 5. No caso do retorno, utilizou-se como parâmetros o retorno médio, retorno anualizado e retorno acumulado; já para mensurar o risco, considerou-se a volatilidade anualizada, o Valor do Risco, o Valor Condicional do Risco, o Índice de Sharpe, o Índice de Sortino, a Beta CAPM e a Alfa de Jensen.

Tabela 5 - Parâmetros de validação dos resultados.

Parâmetro de Validação	Equação	Referência
Retorno Médio (\bar{r}_p)	$\bar{r}_p = \sum_{t=1}^T \frac{r_{p,t}}{T}$	Bachelier (1900)
Retorno Anualizado (r_p^A)	$r_p^A = \left[\prod_{t=1}^T (1 + r_{p,t}) \right]^{252/T} - 1$	Bachelier (1900)
Retorno Acumulado (r_p^C)	$r_p^C = \left[\prod_{t=1}^T (1 + r_{p,t}) \right] - 1$	Bachelier (1900)
Volatilidade Anualizada (σ_p^A)	$\sigma_p^A = \sqrt{252} \sigma_p = \sqrt{252} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{p,t} - \bar{r}_p)^2}$	Gauss (1809)
Valor em Risco ($VaR_{1-\gamma}$)	$VaR_{1-\gamma} = \inf\{x \in R : Prob(r_p < x) \leq \gamma\}$	Christoffersen (1998)
Valor em Risco Condicional ($CVaR_{1-\gamma}$)	$CVaR_{1-\gamma} = \frac{1}{1-c} \int_{-1}^{VaR_{1-\gamma}} xp(x)dx$	Embrechts, Klüppelberg e Mikosch (1997)
Índice Sharpe (S_p)	$S_p = \frac{r_p^A - r_f}{\sigma_p^A}$	Sharpe (1966)
Índice de Sortino ($Sort$)	$Sort = \frac{r_p^A - r_f}{\sigma_{p,d}^A}$	Sortino e Price (1994)
Beta (β)	$\beta = \frac{cov(r_{p,t}, r_{SP500,t})}{\sigma_{SP500}^2}$	Treynor (1962), Sharpe (1964) e Lintner (1965)
Alfa de Jensen (α)	$\alpha = r_{p,t} - [Rf + (r_{SP500,t} - Rf) \beta]$	Jensen (1968)

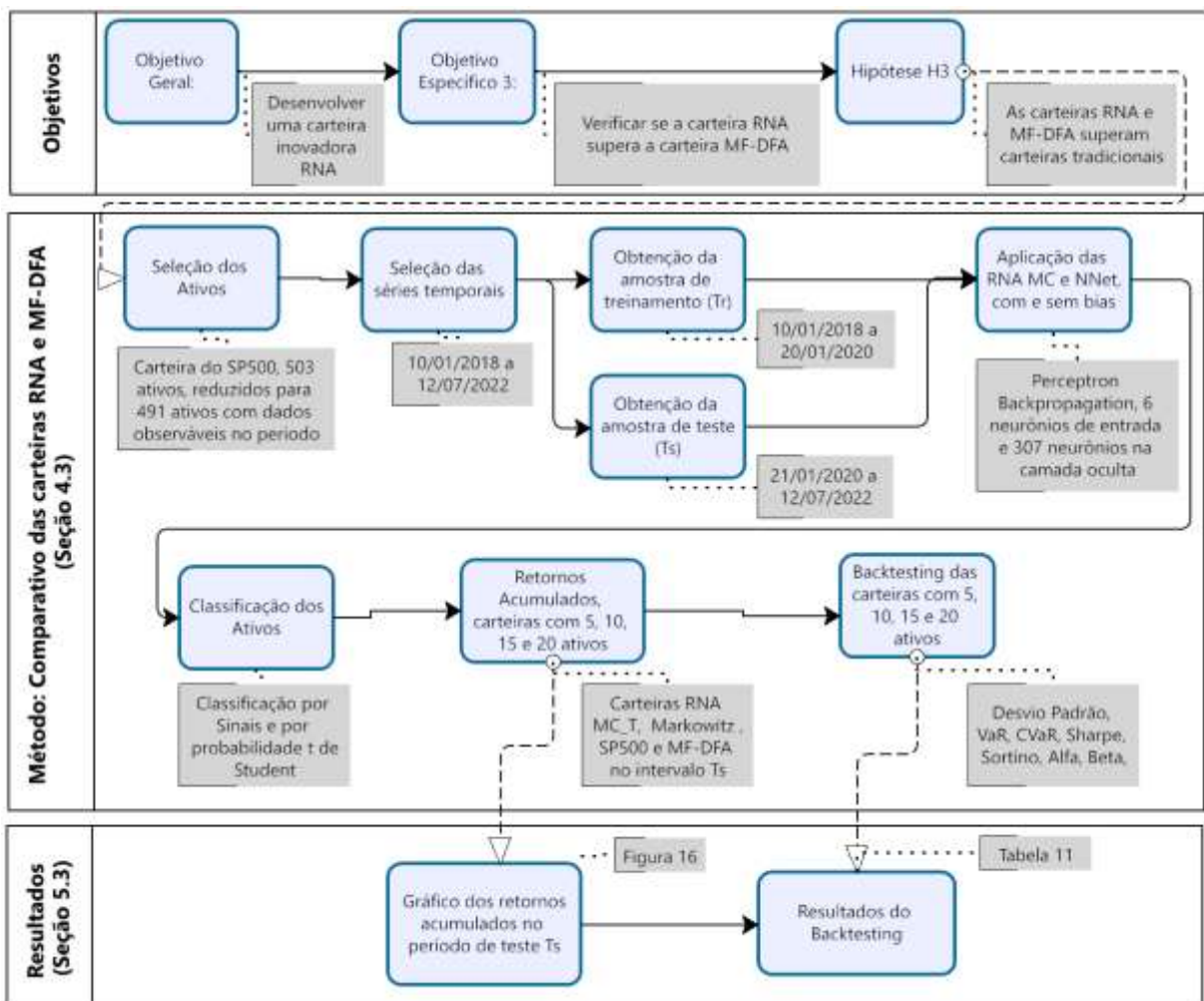
Fonte: Elaboração própria (2024).

Nas equações dos parâmetros de validação, $r_{p,t}$ é o retorno da carteira (p_f) no período (t) sendo o comprimento da série (T) o ano padrão de 252 dias de operação; $\gamma = 5\%$ é o nível de significância da distribuição Normal ao nível de confiança de 5%; $p(x)dx$ é a densidade de probabilidade do valor de retorno (x); e c é o ponto de corte da distribuição analisada.

A taxa livre de risco (r_f) utilizada é de 3,11% a.a. para *t-Bills*, valor observado em 4 de agosto de 2022 (último valor disponível e que não afeta a ordem de resultados da carteira); $\sigma_{p,d}^A$ é o desvio padrão anualizado dos retornos negativos; e $COV(r_{p,t}, r_{SP500,t})$ é a covariância dos retornos do ativo da carteira p_f com o S&P500 em um período t .

A Figura 8 apresenta o delineamento do método empregado na seção 4.3. A partir dos objetivos geral e específico 3, é estabelecido o método de coleta e tratamento dos dados para comparar as carteiras RNA-t e MF-DFA, com as carteiras tradicionais de Markowitz, Sharpe e de mercado SP500.

Figura 8 - Delineamento do método empregado na seção 4.3.



4.4 TESTE DO MODELO COMPARANDO COM CARTEIRAS *VALUE INVESTING*

A amostra utilizada nesta pesquisa é composta por 503 ativos pertencentes ao índice S&P500; foram considerados os dados diários de 03 de janeiro de 2018 até 17 de março de 2022, abrangendo um período de 1.310 dias (a amostra possui 644.520 ativos-dia observados) e, como existem duas publicações no portfólio de Buffet, solicitamos o rebalanceamento da amostra.

Na primeira análise, considerou-se os dados diários de 03 de janeiro de 2018 até 04 de agosto de 2022, abrangendo um período de 1.157 dias (a amostra possui 581.971 ativos-dia observados). Os dados foram divididos em duas subamostras; uma amostra de treinamento (abrangendo o período de 3 de janeiro de 2018 a 30 de dezembro de 2021 que conta 1.001 dias) e uma amostra de teste (abrangendo o período de 31 de dezembro de 2021 a 4 de agosto de 2022 ou 149 dias)¹. As subamostras foram divididas a partir desta data porque o final de 2021 foi o dia com maior valor do índice de ações S&P500, seguido de uma redução superior a 24%. Escolhemos o período de corte intencionalmente, pretendendo analisar os efeitos na previsão de curto prazo do portfólio de RNA a partir de um período de treinamento mais prolongado.

Além disso, considerou-se o rebalanceamento da amostra; pois, de acordo com dados disponibilizados pela *Securities and Exchange Commission* (SEC)², é provável que a carteira de Warren Buffett tenha sido rebalanceada regularmente. Devido a isso, realizamos a segunda análise, na qual utilizamos dados diários de 21 de agosto de 2018 até 17 de março de 2023, abrangendo, novamente, um período de 1.157 dias (a amostra possui 581.971 ativos-dia observados). Os dados foram divididos em duas subamostras: uma amostra de treinamento com período de 21 de agosto de 2018 a 11 de agosto de 2022 (1.001 dias) e, depois, uma amostra de teste com período de 12 de agosto de 2022 a 17 de março, 2023 (149 dias). As subamostras foram divididas a partir desta data porque o final da data foi escolhido proporcionalmente à

¹A diferença entre 1.157 dias e a soma de 1.001 e 149 dias das subamostras se deve à defasagem das observações utilizadas na RNA.

²No segundo trimestre de 2022, conforme a Berkshire Hathaway Inc (2022), o portfólio abrangia alocações significativas, mais de 80% no total, com 41,4% investidos na Apple Corporation (AAPL) no setor de tecnologia, 10,2% no Bank of America (BAC) no setor financeiro e 7,3% na Coca-Cola (KO) no setor alimentar. O setor logístico foi representado por 6,8% na American Express (AXP) e 6,8% na Chevron (CVX) na indústria petrolífera. Adicionalmente, o setor alimentar representava 3,7% da Kraft Heinz (KHC) e 3,3% das ações da carteira da Occidental Petroleum (OXY). O portfólio atualizado no primeiro trimestre de 2023, também conforme a Berkshire Hathaway Inc (2023), também mais de 80% no total, incluiu uma distribuição de 44,1% na Apple Corporation (AAPL), 8,9% no Bank of America (BAC), 7,9% na Chevron (CVX), 7,5% na Coca-Cola (KO), 7,4% na American Express (AXP), 3,8% na Kraft Heinz (KHC), 3,8% das ações da carteira na Occidental Petroleum (OXY) e 2,3% na Moody's (MCO), cada uma representando setores distintos.

primeira amostra de teste para analisar um período de curto prazo representando o mercado baixista.

Durante o período de estudo foram excluídas ações com dados faltantes, o que reduziu a amostra para 492 ativos. Os dados foram capturados na plataforma Bloomberg e processados no software R, conforme Apêndice A.

4.4.1 Métodos

O conjunto de dados consistiu em preços ajustados diariamente ($p_{t,s}$) no período (t) dos ativos (s) para obter os retornos diários ($r_{t,s}$) que foram calculados como sendo a diferença relativa entre p_t e o preço de fechamento defasado em um período (p_{t-1}), dado por $r_{t,s} = (p_{t,s} - p_{t-1,s})/p_{t-1,s}$. O excesso de retorno ($r_{t,s,exc}$) foi previsto através da aplicação de Redes Neurais de cada ativo, definido como a diferença entre $r_{t,s}$ e o retorno da carteira benchmark de Warren Buffett ($r_{t,Buffett}$), $r_{t,s,exc} = r_{t,s} - r_{t,Buffett}$. No total foram geradas 492 RNAs para cada um dos ativos e normalizou-se os ativos que representam 80% do valor do portfólio de Buffett (apenas 7 de 47 e 8 de 48 ativos, de acordo com o segundo trimestre de 2022 e o primeiro trimestre de 2023)(BERKSHIRE HATHAWAY INC., 2022, 2023).

Na configuração da RNA com uma camada oculta usou-se o tipo *Perceptron Feedforward Backpropagation*, 5.000 épocas ou replicações de retropropagação *feedforward* e um erro máximo de 0,01 após (TYAGI; ABRAHAM, 2022). Como um neurônio de saída ou variável de saída foi utilizado $r_{t,Buffett}$ e, em 15 dos 492 ativos, usamos 20.000 épocas porque os dados não convergiram para o erro máximo de 0,01 com menos épocas. A camada de entrada tinha seis neurônios; o primeiro foi o retorno defasado da carteira de Buffett ($r_{t-1,Buffett}$), e os outros cinco neurônios foram os retornos defasados excessivos ($r_{t-n,s,exc}$), com (n) de 1 a 5 períodos do ativo em relação ao retorno da carteira de Buffett. A camada oculta possui vários neurônios iguais ao número de dias observados no período de tratamento (1.001 neurônios). A camada de saída possui um neurônio representando a variável dependente dos retornos esperados excessivos do ativo no período t ($E(r_{t,s,exc})$) em relação ao retorno da carteira de Buffett no mesmo período (t):

$$E(r_{t,s,exc}) = \varphi \left\{ \sum_{k'=1}^{307} w_{k'j} \left[\varphi' \left(\begin{aligned} &w_{1j}R_{Buffett(t-1)} + w_{2j}r_{exc_s(t-1)} + w_{3j}r_{exc_s(t-2)} \\ &+ w_{4j}r_{exc_s(t-3)} + w_{5j}r_{exc_s(t-4)} + w_{6j}r_{exc_s(t-5)} \\ &+ \beta_0 \end{aligned} \right) \right] + \beta_0' \right\}. \quad (20)$$

Assim sendo, w_{kj} são os pesos dos neurônios k , $x_{Hk'j}$ é a camada oculta e β_0 e β_0' são o viés da RNA. Uma vez obtido o $E(r_{t,sexc})$, calculou-se a probabilidade t de *Student* de cada um dos retornos excessivos ser superior ao retorno da carteira de Buffett ajustado pelo erro padrão ($S_E = S_d / \sqrt{n}$) (STUDENT, 1908). Em seguida, classificou-se em ordem decrescente de probabilidade e selecionou-se os sete ativos com maior probabilidade de superar o retorno da carteira de Buffett para montar as carteiras de RNAs. Esse número foi escolhido para ter o mesmo número de ativos divulgados como sendo a composição de 80% da carteira de Buffett (BERKSHIRE HATHAWAY INC, 2022).

A Tabela 6 sintetiza as equações de geração do portfólio ANNt; os mesmos apresentados em relação à ANNt da Tabela 3. A saída u_k em portfólios de redes neurais artificiais é uma combinação linear determinada pela soma dos pesos sinápticos associados a cada entrada dos k neurônios. A ponderação de cada peso w_{kj} , com a variável de entrada ou sinal de entrada x_j , é combinada linearmente para formar u_k . O sinal produzido é aumentado se positivo ou o sinal observado se negativo à combinação linear resultante u_k , sendo um parâmetro externo ao neurônio a fim de potencializar o sinal de ativação.

Tabela 6 - Equações de geração das carteiras comparadas.

Portfólio	Equação	Referência
ANNt	$u_k = \sum_{j=1}^n w_{kj}x_j$ $v_k = u_k + \beta_0$ $\hat{y}_k = \varphi(v_k)$ $e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$ $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dx$	Student (1908), McCulloch e Pitts (1943) e Hebb (1949)

u_k é a combinação linear resultante, w_{kj} são os pesos dos neurônios k , x_j são as entradas, β_0 é uma constante chamada viés, v_k é conhecido como potencial de ativação. \hat{y}_k é o sinal de saída ou resultado final (a probabilidade do retorno exceder o desempenho do benchmark). $\varphi(\cdot)$ é a função de ativação, $e_j(n)$ é o sinal de erro para o neurônio j , $d_j(n)$ é a resposta desejada para um neurônio j , e $y_j(n)$ é o sinal de saída para o neurônio j . $f(t)$ é a função de probabilidade cumulativa de cada ativo $P(X \leq x)$, classificada do maior para o menor, para um determinado valor na distribuição t de *Student*.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A constante β_0 é chamada de viés; e a soma da combinação linear u_k com a constante β_0 é conhecida como potencial de ativação v_c que é mantido constante dada a função de ativação. Deste modo, o sinal de saída ou resultado é representado por \hat{y}_k (a probabilidade de o retorno exceder o desempenho do benchmark); o sinal de erro para o neurônio j é representado

por $e_j(n)$; a resposta desejada para um neurônio é representada por $d_j(n)$; e o sinal de saída para o neurônio j é representado por $y_j(n)$. Portanto, para efeito de criação de carteiras, a função de probabilidade cumulativa ($f(t)P(X \leq x)$) de cada ativo, ordenada do maior para o menor para um determinado valor na distribuição t de *Student*, é viável e passível de ser obtida.

Com isso, foram formados três portfólios de RNAs; um com pesos uniformemente distribuídos (ANNt_{Eq}), outro com pesos de Markowitz (MARKOWITZ, 1952) pesos de mínima variância (ANNt_Mkw), e uma carteira com Sharpe (SHARPE, 1966) pesos máximos de variância (ANNt_Sharpe). Os retornos acumulados de ambas as carteiras foram comparados com os retornos da carteira de Buffett, da carteira S&P500, da carteira de mínima variância de Markowitz ($\min_{W_s}[\sigma_p^2] = \min_{W_s}$) e do retorno da carteira de retorno máximo de Sharpe ($\max_{W_s}[S_p]$); e aplicou-se Markowitz e Sharpe a todos os ativos incluídos na carteira S&P500. Para o cálculo da carteira de pesos ingênuos empregou-se $W_s = 1/N$, conforme Getty (1963), onde W_s é o peso dos ativos e N é o número de ativos. As carteiras de variância mínima foram calculadas da seguinte forma:

$$\min_W[\sigma_p^2] = \min_W[W^T \Phi W], \quad (21)$$

onde $\sum_{s=1}^N W_s = 1$ está sujeito a restrição de 1 a N ativos s ; $\sigma_p^2 = W^T \Phi W$ representa a variância da carteira; T é o período total analisado (149 dias para a amostra de teste); e ϕ é a matriz de covariância de ordem $N \times N$. O portfólio de máximo Sharpe foi obtido otimizando o problema:

$$\max_W[S_p] = \max_W \frac{W^T R_p - r_f}{\sqrt{W^T \Phi W}}, \quad (22)$$

onde está sujeito a restrição $\sum_{s=1}^N W_s = 1$; $R_p = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$ é o vetor médio dos retornos dos ativos; e r_f é livre de risco.

4.4.2 Validação

Seguindo a abordagem mencionada, a mesma carteira foi testada por um período mais extenso; a primeira análise começa em 21 de janeiro de 2020 até 4 de agosto de 2022 (641 dias de observação), tendo o seu período de corte quando houve a primeira morte registrada nos

EUA devido ao vírus Covid-19, evento este considerado um choque estocástico na série de dados financeiros dos EUA. O período para a segunda análise cobre um período de longo prazo, de 1º de setembro de 2020 a 17 de março de 2023 (novamente, 641 dias de observação).

A Tabela 7 ilustra o comprimento das séries temporais de cada ativo utilizadas na primeira carteira e na segunda carteira que considera o rebalanceamento nos testes de curto e longo prazo. Além disso, o desempenho das diferentes carteiras foi avaliado no *backtesting* de retorno e risco.

Tabela 7 - Período de análise da 1º e 2º série temporal (rebalanceamento) na amostra total.

Amostra Total			
1,310 dias			
01-03-2018	17-03-2023		
1º Série Temporal			
Treinamento 1.001 dias		Teste de Curto Prazo 149 dias	
01-03-2018	12-30-2021	12-31-2021	08-04-2022
		Validação: Teste de Longo Prazo 641 dias	
	01-21-2020	08-04-2022	
2º Série Temporal – Rebalanceamento			
Treinamento Rebalanceado 1.001 dias		Teste de Curto Prazo Rebalanceado 149 dias	
08-21-2018	08-11-2022	08-12-2022	17-03-2023
		Validação: Teste de Longo Prazo Rebalanceado 641 dias	
	09-01-2020	17-03-2023	

Série histórica com 1.157 dias utilizados na primeira carteira (01-03-2018 a 08-04-2022) e na segunda carteira (21/08/2018 a 17/03/2023). Para a amostra de testes, considerou-se 149 e 641 dias nos testes de curto e longo prazo, respectivamente (31/12/2021 a 04/08/2023 e 12/08/2022 a 17/03/2023 para testes de curto prazo, na primeira carteira e carteira de rebalanceamento; 21-01-2020 a 04-08-2022 e 01-09-2020 a 17-03-2023 para longo prazo, na primeira carteira e na segunda carteira rebalanceada). Para o teste de longo prazo, os períodos de treinamento foram mantidos os mesmos do curto prazo.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A Tabela 8, semelhante à Tabela 5, fornece mais detalhes sobre os métodos de *backtesting*, onde utilizamos o Retorno Médio da Carteira (\bar{r}_p), o Retorno Anualizado (r_p^A), o Retorno Cumulativo (r_p^C), a Volatilidade Anualizada (σ_p^A), o Valor em Risco ($VaR_{1-\gamma}$), o Valor em Risco Condicional ($CVaR_{1-\gamma}$), Beta CAPM (β), Índice de Sharpe (S_p), Índice de Sortino ($Sort$), Índice de Treynor (Try) e Alfa de Jensen (α).

Calculou-se \bar{r}_p como Bachelier (1900), onde $r_{p,t}$ é o retorno da Carteira (pf) no Período (t). Então, calcula-se r_p^A onde 252 é o número de dias úteis do ano; ou seja, com negociação

em bolsa, considerando o calendário ocidental. O r_p^C calcula o retorno geométrico ou acumulado no período (T); para analisar o risco utilizou-se a Volatilidade Anualizada do Retorno da Carteira (σ_p^A) cuja fórmula é explicada na Tabela 8 (GAUSS, 1809).

Tabela 8 - Parâmetros de validação.

Parâmetro de validação	Equação	Referências
Retorno médio (\bar{r}_p)	$\bar{r}_p = \sum_{t=1}^T \frac{r_{p,t}}{T}$	Bachelier (1900)
Retorno Anualizado (r_p^A)	$r_p^A = \left[\prod_{t=1}^T (1 + r_{p,t}) \right]^{252/T} - 1$	Bachelier (1900)
Retorno Acumulado (r_p^C)	$r_p^C = \left[\prod_{t=1}^T (1 + r_{p,t}) \right] - 1$	Bachelier (1900)
Volatilidade Anualizada (σ_p^A)	$\sigma_p^A = \sqrt{252} \sigma_p = \sqrt{252} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{p,t} - \bar{r}_p)^2}$	Gauss (1809)
Valor em risco ($Var_{1-\gamma}$)	$Var_{1-\gamma} = \inf\{x \in \mathfrak{R} : Prob(r_p < x) \leq \gamma\}$	Christoffersen (1998)
Valor Condicional em Risco ($CVaR_{1-\gamma}$)	$CVaR_{1-\gamma} = \frac{1}{1-c} \int_{-1}^{Var_{1-\gamma}} xp(x)dx$	Embrechtsm Klüppelbergm e Mikosch (1997)
Beta (β)	$\beta = \frac{cov(r_{p,t}, r_{SP500,t})}{\sigma_{SP500}^2}$	Treynor (1962), Sharpe (1964) e Lintner (1965)
Índice de Sharpe (S_p)	$S_p = \frac{r_p^A - r_f}{\sigma_p^A}$	Sharpe (1966)
Índice de Sortino ($Sort$)	$Sort = \frac{r_p^A - r_f}{\sigma_{p,d}^A}$	Sortino e Price (1994)
Índice de Treynor (Try)	$Try = \frac{r_p^A - r_f}{\beta_{p,d}^A}$	Treynor (1965)
Alfa de Jensen (α)	$\alpha = r_{p,t} - [r_f + (r_{SP500,t} - r_f) \beta]$	Jensen (1968)

t é o período analisado, T é o período total analisado. $r_{p,t}$ é o retorno da carteira p em t . σ_p é o desvio padrão da carteira pf , \bar{r}_p é o retorno médio da carteira pf , γ é o nível de significância, x é um valor de retorno específico exigido. c é o ponto de corte da distribuição analisada e $p(x)dx$ é a densidade de probabilidade de obter retorno com valor (x). $r_{SP500,t}$ é o retorno do S&P500 no período t e $cov(r_{p,t}, r_{SP500,t})$ é a covariância dos retornos do portfólio pf com o S&P500 no período t . r_f é a taxa livre de risco e $\sigma_{p,d}^A$ é o desvio padrão anualizado dos retornos negativos e $\beta_{p,d}^A$ é o beta anualizado dos retornos negativos.

Fonte: Elaboração própria (2024).

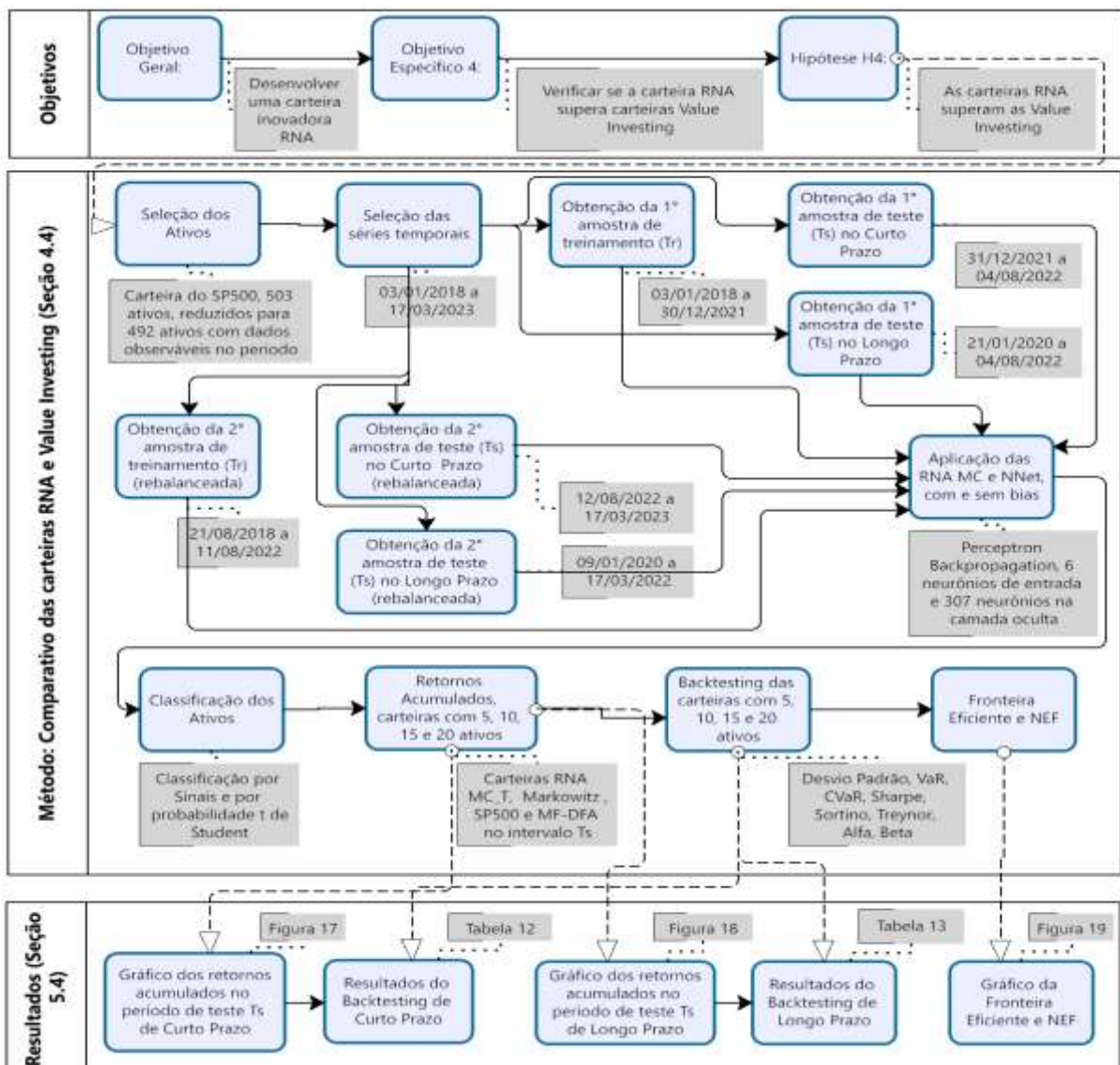
Também foram calculados o Valor em Risco médio diário (Var_{95}) para um intervalo de confiança de 95%, conforme Christoffersen (1998), em que $\gamma = 95\%$ é o nível de confiança; e o Valor Condicional em Risco ($CVaR_{95}$), conforme Embrechts; Klüppelberg; Mikosch

(1997), onde $p(x)dx$ é a densidade de probabilidade de obter um retorno com valor (x). Logo, c é o ponto de corte da distribuição analisada; como medida relativa entre risco e retorno usou-se o Índice de Sharpe (S_p), conforme Sharpe (1966), Índice de Sortino ($Sort$), conforme Sortino; Price (1994) e índice de Treynor (Try), conforme Treynor (1965); e, para avaliar o desempenho da carteira acima do CAPM, utilizou-se o Alfa de Jensen (α) (JENSEN, 1968).

Como critério de medição do risco relativo Sharpe foi adotada a razão entre o r_p^A desconto da taxa livre de risco (r_f) (3,1% aa em 04 de agosto de 2022, para *t-Bills*; a data foi escolhida por ser o último valor obtido na data de análise) e σ_p^A .

A Figura 9 apresenta o delineamento do método utilizado para comparar carteiras RNA-t e *Value Investing* na seção 4.4.

Figura 9 - Delineamento do método utilizado para comparar carteiras RNA-t e Value Investing na seção 4.4.



Fonte: Elaboração própria (2024).

Também foram apresentados o comportamento das carteiras em relação à fronteira eficiente de Markowitz que relaciona o retorno e o desvio padrão, e uma nova técnica inspirada em De Miranda Cardoso, Ying e Palomar (2021) para identificação da melhor alternativa de investimento que relaciona o retorno e a probabilidade de o retorno exceder o benchmark de avaliação de investimentos. Assim, é possível identificar visualmente oportunidades e padrões no mercado com clusters de ativos ou ativos com comportamentos semelhantes, uma vez que no gráfico de dispersão entre retornos e desvio-padrão dos ativos é possível identificar agrupamentos de ativos, alguns mais rentáveis como menos risco, outros menos rentáveis com mais risco, que pode ser acompanhado ao longo do tempo para identificar as ações como maior potencial de retorno que superem o mercado, a exemplo do cluster “sete magníficas³”, bastante analisado pelos profissionais de mercado.

A seguir, no Capítulo 5, são apresentados os resultados da aplicação dos procedimentos metodológicos.

³ As sete magníficas são as empresas Alphabet, Amazon, Apple, Meta, Microsoft, Nvidia e Tesla. Empresas estas do cluster alta tecnologia (RUSSELL; RENNISON, 2024).

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O presente capítulo apresenta a análise e discussão dos resultados obtidos por meio dos procedimentos metodológico desenvolvidos neste estudo. Para um melhor entendimento dos resultados, esse capítulo foi dividido em quatro seções sendo, a primeira, voltada à apresentação dos resultados do experimento na amostra piloto e na amostra do S&P500. Na segunda seção apresenta-se a validação do experimento que compara os resultados dos portfólios ANNt com as carteiras benchmark e, na terceira seção, são evidenciados os testes do modelo comparado com a carteira MF-DFA. Por fim, a quarta seção apresenta os resultados do teste comparando com a carteira Berkshire Hathaway de Wharran Buffet, representante da técnica Value Investing, com adoção de rebalanceamento.

5.1 O EXPERIMENTO RNA COM DISTRIBUIÇÃO t DE *STUDENT*

Primeiro, os resultados $E(R_{Pf})$, $E(R_{Pf})_{Aj}$, $E(R_{Pf})_{SHARPE}$ e $E(RA_{Pf})$ de cada uma das 50 carteiras de investimentos são apresentados utilizando os 70 ativos das 11 amostras piloto de modelagem experimental das técnicas propostas. Posteriormente, os procedimentos metodológicos são validados utilizando 490 ativos das 11 amostras de validação obtidas da carteira do índice S&P500. É importante notar que todos os ativos nas amostras piloto e de validação apresentaram curtose leptocúrtica e assimetria. É significativo que todos os ativos incluídos na amostra piloto e de validação apresentem curtose leptocúrtica e assimetria.

Conforme descrito em legenda, a Figura 10 apresenta a análise do período de treinamento (23/09/2020 a 30/12/2021) e do período de teste (03/01/2022 a 14/07/2022) para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = \sum_{t=1}^T r_{Pf,t} / T$; o retorno esperado ajustado ao risco, $E(R_{Pf})_{Aj} = R_{Pf} / \sigma_{Pf}^2$; o retorno esperado ajustado por Sharpe $E(R_{Pf})_{Sharpe} = (R_{Pf} - R_f) / \sigma_{Pf}^2$; e o retorno esperado acumulado $E(RA_{Pf}) = (1 + R_{Pf})^T$ descritos na seção 3.1 da metodologia para carteiras de investimentos (Pf) compostas por 1 a 50 ativos com maior probabilidade ($P(r_{exc-p_s(t)} > 0)$) de retorno excedente. A figura inclui 14 curvas de expectativa de retorno $E(R)$ das carteiras Pf , representando o desempenho durante os períodos de treinamento (T_r) e teste (T_s) da amostra piloto.

As curvas de expectativa correspondem aos seguintes modelos de carteiras de investimentos e períodos (treinamento T_r ou teste T_s):

1. S&P500 durante o período de treinamento T_r (SP_Tr);

2. S&P500 durante o período de teste T_s (SP_Ts);
3. C_M_S durante o período de treinamento T_r (C_S_Tr);
4. C_M_S durante o período de teste T_s (C_S_Ts);
5. C_M_T durante o período de treinamento T_r (C_T_Tr);
6. C_M_T durante o período de teste T_s (C_T_Ts);
7. NNet_S durante o período de treinamento T_r (N_S_Tr);
8. NNet_S durante o período de teste T_s (N_S_Ts);
9. NNet_T durante o período de treinamento T_r (N_T_Tr);
10. NNet_T durante o período de teste T_s (N_T_Ts);
11. Nnet_T_M durante o período de treinamento T_r (N_TM_Tr);
12. Nnet_T_M durante o período de teste T_s (N_TM_Ts);
13. Markov ativos durante o período de treinamento T_r (Mkv_Tr), e;
14. Markov ativos durante o período de teste T_s (Mkv_Ts).

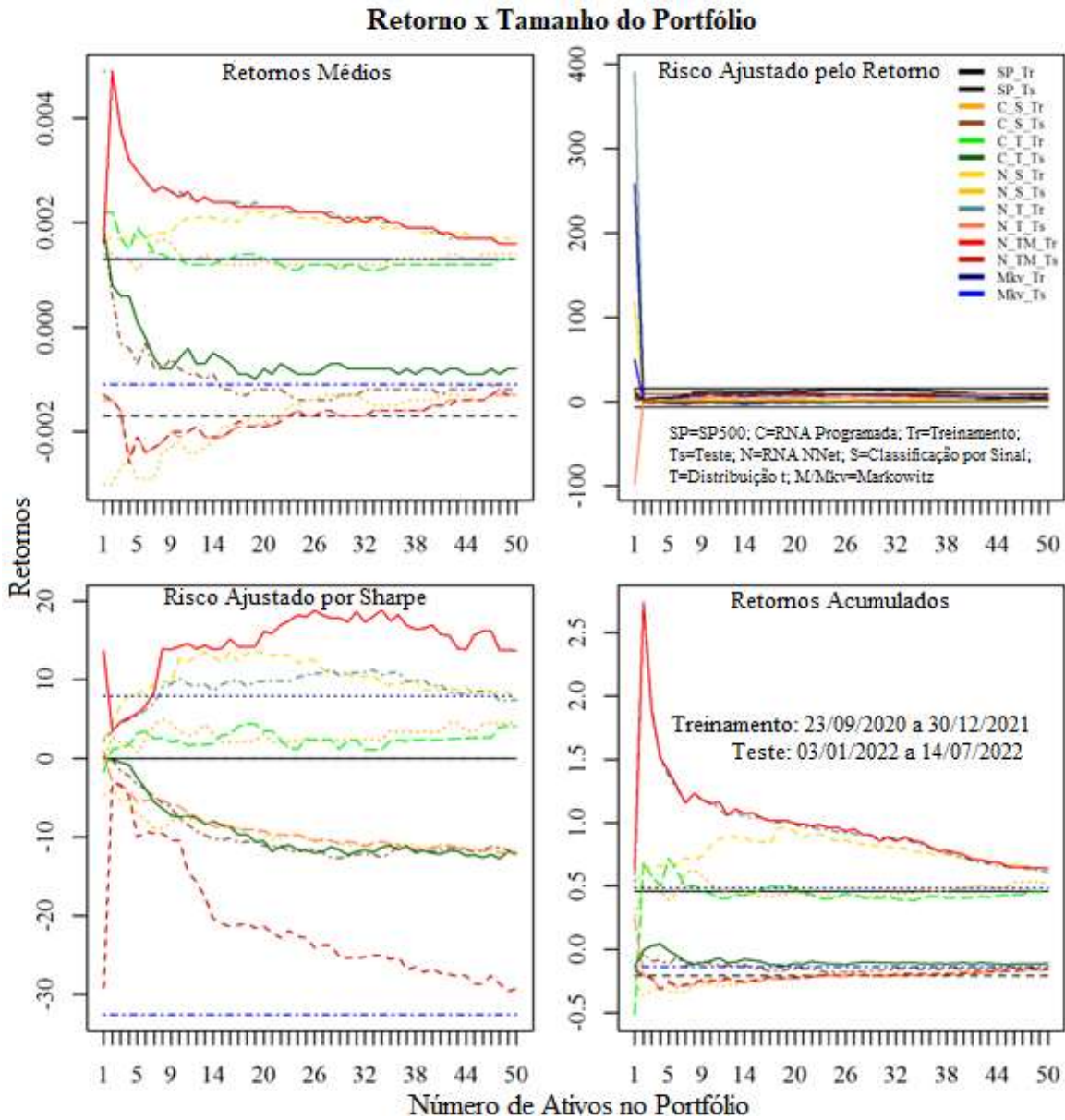
Os resultados indicam que as carteiras de investimentos construídas pelos métodos (N_S_Tr), (N_T_Tr) e (N_TM_Tr) superaram o portfólio Markowitz (Mkv_Tr) e a carteira S&P500 (SP_Tr) durante todo o período de treinamento (T_r). Técnicas de classificação baseadas na distribuição t de *Student* e classificação de sinais (S^+ ou S^-) em (C_T_Tr) e (N_S_Tr) apresentam desempenho superior; superando, inclusive, as carteiras *Pf* com 12 ativos. No entanto, o seu desempenho diminui para carteiras mais diversificadas (13 a 50 ativos) em comparação com a carteira Markowitz (Mkv_Tr).

Ao considerar retornos ajustados pela variância $E(R_{Pf})_{Aj}$, a carteira S&P500 demonstra maior eficiência, seguida de perto pelas demais carteiras. Os retornos ajustados pelo índice de Sharpe apresentam excelente desempenho para carteiras *Pf* com mais de 7 ativos nas técnicas (C_T_Tr), (N_T_Tr) e (N_TM_Tr).

O retorno cumulativo esperado ($E(RA_{Pf})$) durante o período de formação T_r é significativamente superior ao retorno acumulado do índice de referência S&P500 ($RA_{S\&P500}$); varia de 2,8 a 0,7, equivalente a retornos de 280% e 70%, que são muito superiores ao retorno $RA_{S\&P500}$ de 0,44 (44%) mostrado na Figura 10.

O *backtest* realizado na amostra teste T_s confirma a eficiência do método com maiores retornos médios ($E(R_{Pf})$) observados na técnica C_T_Ts em todas as 50 carteiras de investimento *Pf*. Os retornos ajustados pela variância mínima $E(R_{Pf})_{Aj}$ superaram os retornos da carteira S&P500 ($R_{S\&P500}$) e os retornos ajustados pelo índice de Sharpe ($E(R_{Pf})_{Sharpe}$).

Figura 10 - Retorno x Tamanho da Carteira de Investimentos.



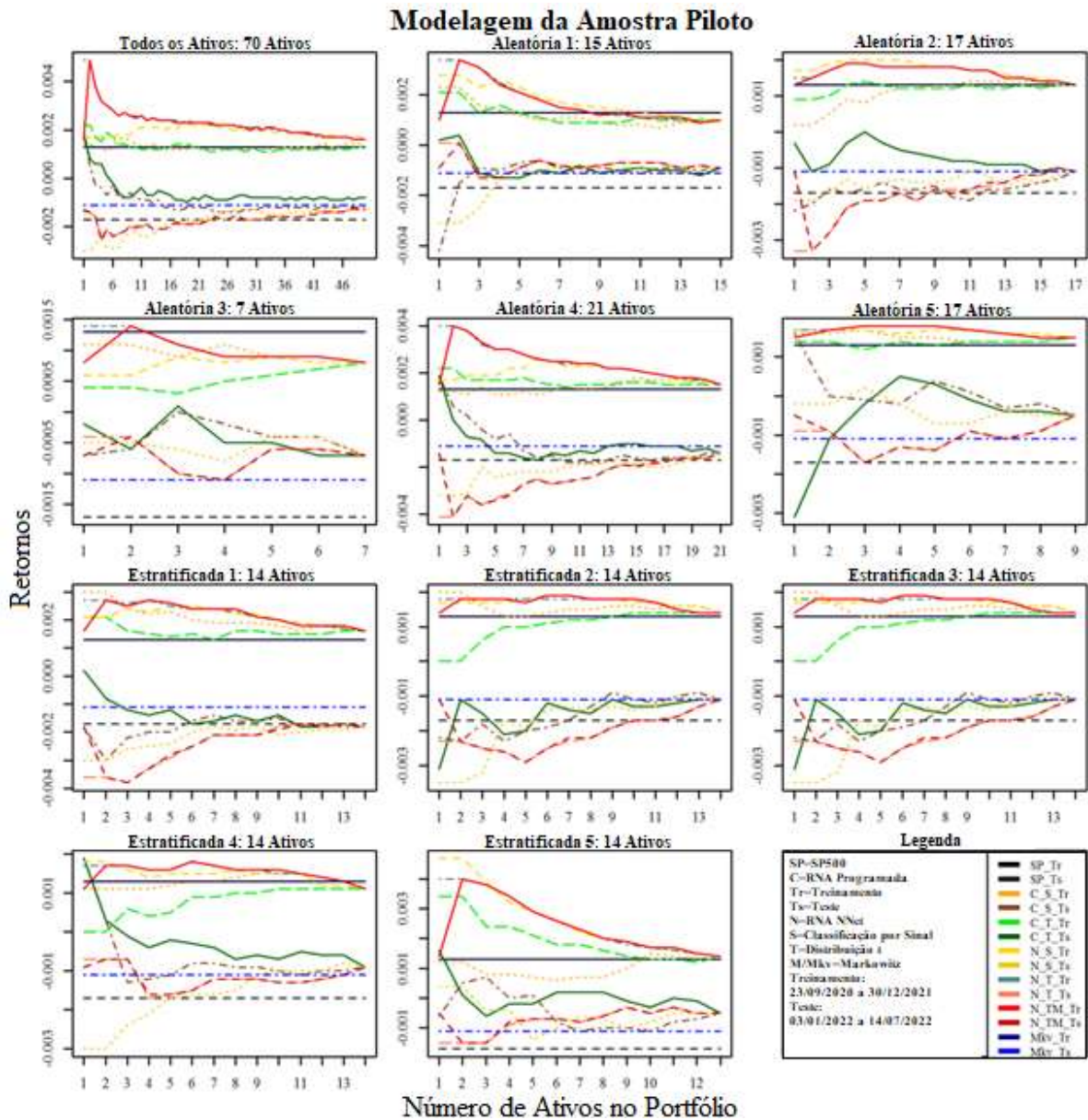
Análise do período de treinamento (23/09/2020 a 30/12/2021) e do período de teste (03/01/2022 a 14/07/2022), para 14 modelos de carteiras de investimentos, conforme descrito em legenda, para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = \sum_{t=1}^T r_{Pf,t} / T$; o retorno esperado ajustado ao risco, $E(R_{Pf})_{Aj} = R_{Pf} / \sigma_{Pf}^2$; o retorno esperado ajustado por Sharpe $E(R_{Pf})_{Sharpe} = (R_{Pf} - R_f) / \sigma_{Pf}^2$; e o retorno esperado acumulado $E(RA_{Pf}) = (1 + R_{Pf})^T$, de 14 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A Figura 11 mostra os resultados que confirmam a eficiência do método experimental em todas as 10 subamostras durante o período de treinamento Tr (23/09/2020 a 30/12/2021) e o período de teste Ts (03/01/2022 a 14/07/2022) para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf} / T$ de 14 modelos de carteiras de investimentos. No primeiro gráfico, a composição oscila de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 70 ativos; e, nos demais, oscila de 1 a n nas 5

subamostras aleatórias e nas 5 subamostras estratificadas conforme descrito na seção 3.1 do capítulo 3, procedimentos metodológicos.

Figura 11 - Amostras piloto de modelagem experimental das técnicas propostas.



Análise do período de treinamento Tr (23/09/2020 a 30/12/2021) e do período de teste Ts (03/01/2022 a 14/07/2022), conforme descrito em legenda, para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf}/T$, de 14 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 70 ativos; e oscilando de 1 a n nas 5 subamostras aleatórias e nas 5 subamostras estratificadas.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A Tabela 9 apresenta um resumo do resultado da análise para os 50 portfólios gerados utilizando o piloto ou amostra de modelagem compostos por 70 ativos conforme mostrado no primeiro gráfico da Figura 11. Os portfólios foram gerados utilizando o pacote NeuralNet e

classificados utilizando a distribuição t de *Student*, N_T_Tr dentro do subgrupo de treinamento da amostra. Essas carteiras tiveram retorno médio diário de 0,2314%, retorno mediano de 0,2200% e amplitude de 0,33%. No subgrupo de teste da amostra, as 50 carteiras geradas pelo método RNA criada manualmente e classificadas pelo método do Sinal C_S_Ts obteve o maior retorno médio de -0,1012%. A rentabilidade mediana dessas carteiras foi de -0,1200% com amplitude de 0,33%.

Tabela 9 - Análise descritiva de retornos de carteiras de amostras e subamostras de modelagem.

Parâmetro	Média	1º Quartil	3º Quartil	Mediana	Máximo	Mínimo	Amplitude
SP_Tr	0,0130	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0000
SP_Ts	-0,0170	-0,0017	-0,0017	-0,0017	-0,0017	-0,0017	0,0000
C_S_Tr	0,0130	0,0012	0,0014	0,0013	0,0017	0,0011	0,0006
C_S_Ts	-0,0010	-0,0012	-0,0009	-0,0012	0,0019	-0,0014	0,0033
C_T_Tr	0,0013	0,0012	0,0013	0,0012	0,0022	0,0011	0,0011
C_T_Ts	-0,0006	-0,0009	-0,0001	-0,0008	0,0019	-0,0010	0,0029
N_S_Tr	0,0019	0,0018	0,0021	0,0019	0,0022	0,0016	0,0006
N_S_Ts	-0,0017	-0,0022	-0,0013	-0,0015	-0,0012	-0,0030	0,0018
N_T_Tr	0,0023	0,0019	0,0024	0,0022	0,0049	0,0016	0,0033
N_T_Ts	-0,0017	-0,0019	-0,0015	-0,0017	-0,0013	-0,0025	0,0012
N_TM_Tr	0,0022	0,0019	0,0049	0,0022	0,0049	0,0016	0,0033
N_TM_Ts	-0,0017	-0,0019	-0,0012	-0,0017	-0,0012	-0,0026	0,0014
Mkv_Tr	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0000
Mkv_Ts	-0,0011	-0,0011	-0,0011	-0,0011	-0,0011	-0,0011	0,0000

Análise do período de treinamento Tr (23/09/2020 a 30/12/2021) e do período de teste Ts (03/01/2022 a 14/07/2022), para o retorno médio esperado $E(R_{pf}) = R_{pf}/T$, quartis e amplitude dos retornos de 14 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 70 ativos; e oscilando de 1 a n nas 5 subamostras aleatórias e nas 5 subamostras estratificadas.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A

Tabela 10 apresenta os resultados das diferenças de médias dos testes estatísticos, teste t e ANOVA. A apresentação dos resultados à amostra principal, as subamostras piloto não são apresentadas porque serão necessárias mais 83 tabelas, e outras 550 tabelas para as amostras de validação. Porém, em todas as amostras testadas, os resultados são consistentes, conforme demonstrado nos níveis de significância de 1% (***) , 5% (**) e 10% (*).

Tabela 10 - Teste t e análise de variância ANOVA da amostra piloto.

Portfólios no Treinamento	Teste t Tr	ANOVA Tr	Portfólios no Teste	Teste t Ts	ANOVA Ts
C_S_Tr /C_T_Tr	0.196	0.000***	C_S_Ts /C_T_Ts	0.146	0.000***
C_S_Tr /N_S_Tr	0.067	0.000***	C_S_Ts /N_S_Ts	0.000***	0.035**
C_S_Tr /N_T_Tr	0.001***	0.000***	C_S_Ts /N_T_Ts	0.054*	0.000***
C_S_Tr /N_TM_Tr	0.001***	0.000***	C_S_Tr /N_TM_Ts	0.009***	0.101
C_T_Tr /N_S_Tr	0.001***	0.000***	C_T_Ts /N_S_Ts	0.000***	0.504
C_T_Tr /N_T_Tr	0.000***	0.022**	C_T_Ts /N_T_Ts	0.017**	0.010***
C_T_Tr /N_TM_Tr	0.000***	0.001***	C_T_Tr /N_TM_Ts	0.008***	0.000***
N_S_Tr /N_T_Tr	0.005***	0.000***	N_S_Ts /N_T_Ts	0.013**	0.016**
N_S_Tr /N_TM_Tr	0.005***	0.000***	N_S_Tr /N_TM_Ts	0.010***	0.143
N_T_Tr /N_TM_Tr	0.701	0.000***	N_T_Tr /N_TM_Ts	0.677	0.000***

(***) 1%, (**) 5%, e (*) 1% de significância.

Fonte: Elaboração própria (2024).

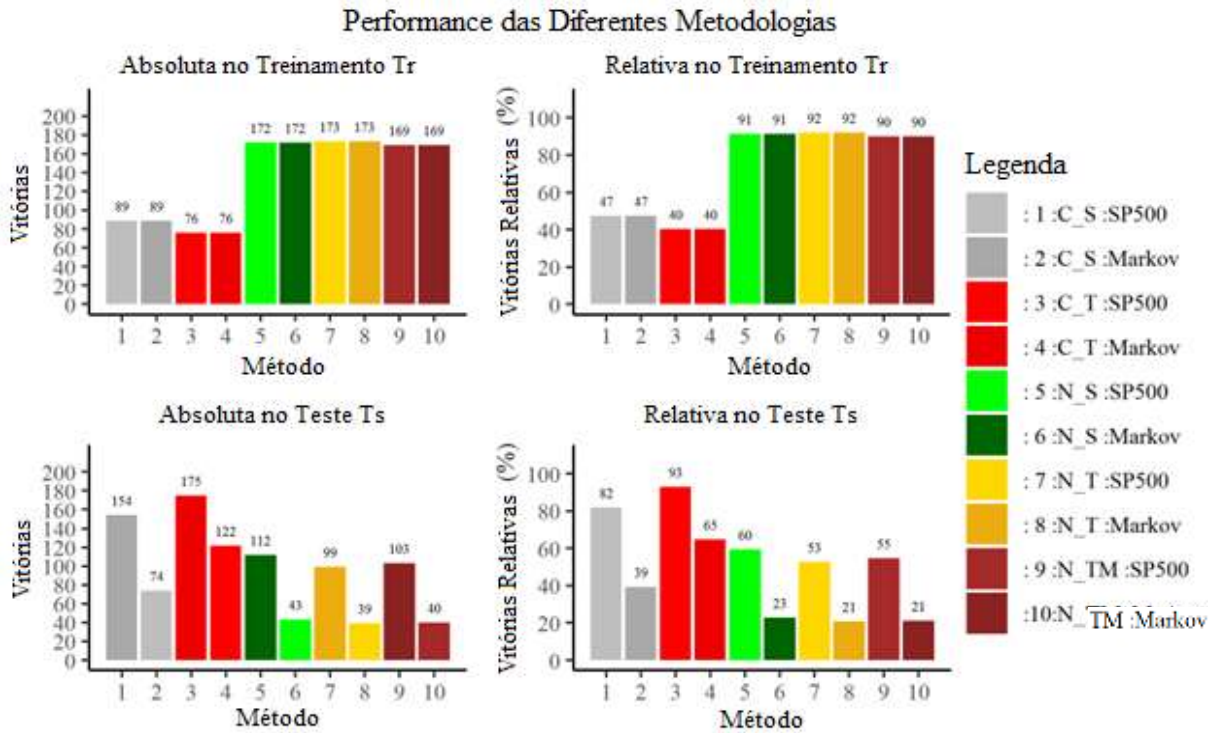
A Figura 12 resume o desempenho, indicando o número de vitórias das técnicas testadas na carteira de benchmark S&P500 e na carteira de Variância Mínima (Markowitz), geradas a partir dos 70 ativos que compõem a amostra piloto de modelagem utilizadas no treinamento Tr e no teste Ts , descritos na seção 3.1.

Na Tr , a metodologia que apresentou melhor desempenho foi a gerada pela RNA do pacote NeuralNet com distribuição de probabilidade t de *Student* (N_T), superando em 173 das carteiras de investimentos Pf testadas, tanto o benchmark S&P500 quanto a carteira de variância mínima de Markowitz, respectivamente; (: 7 N_T_Tr: SP500) e (: 8 N_T_Tr: Markov), em 92% dos casos.

No teste amostral T_s houve queda de desempenho e a metodologia que apresentou melhor desempenho foi a das carteiras de investimentos geradas pela RNA programada manualmente (C_T); superou 175 das 188 carteiras de investimento testadas em fase de treinamento e 122 das 188 carteiras testadas na fase de teste, representando 93% e 65% dos casos.

Apesar da queda no desempenho observada durante o *backtest* T_s , os resultados de 93% e 65% de vitórias são significativamente superiores aos de mercado, medidos pelo S&P500 e pela carteira de Variância Mínima de Markowitz. Quanto aos pesos w_s adotados nas carteiras, o teste t de diferença de médias indicou diferença estatisticamente significativa entre todos os métodos de formação de carteiras.

Figura 12- Desempenho absoluto e relativo (%) das diferentes metodologias de modelagem de carteiras de investimento, apresentadas na seção 3.1, com uso de RNA-t.



Frequência de vitórias absoluta e relativa (retorno maior que o benchmark carteira Markov ou carteira SP500) na análise do período de treinamento Tr (23/09/2020 a 30/12/2021) e do período de teste Ts (03/01/2022 a 14/07/2022), para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf}/T$, de 14 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 70 ativos; e oscilando de 1 a n nas 5 subamostras aleatórias e nas 5 subamostras estratificadas, num total de 188 simulações de carteiras no treinamento Tr e no teste Ts , respectivamente.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

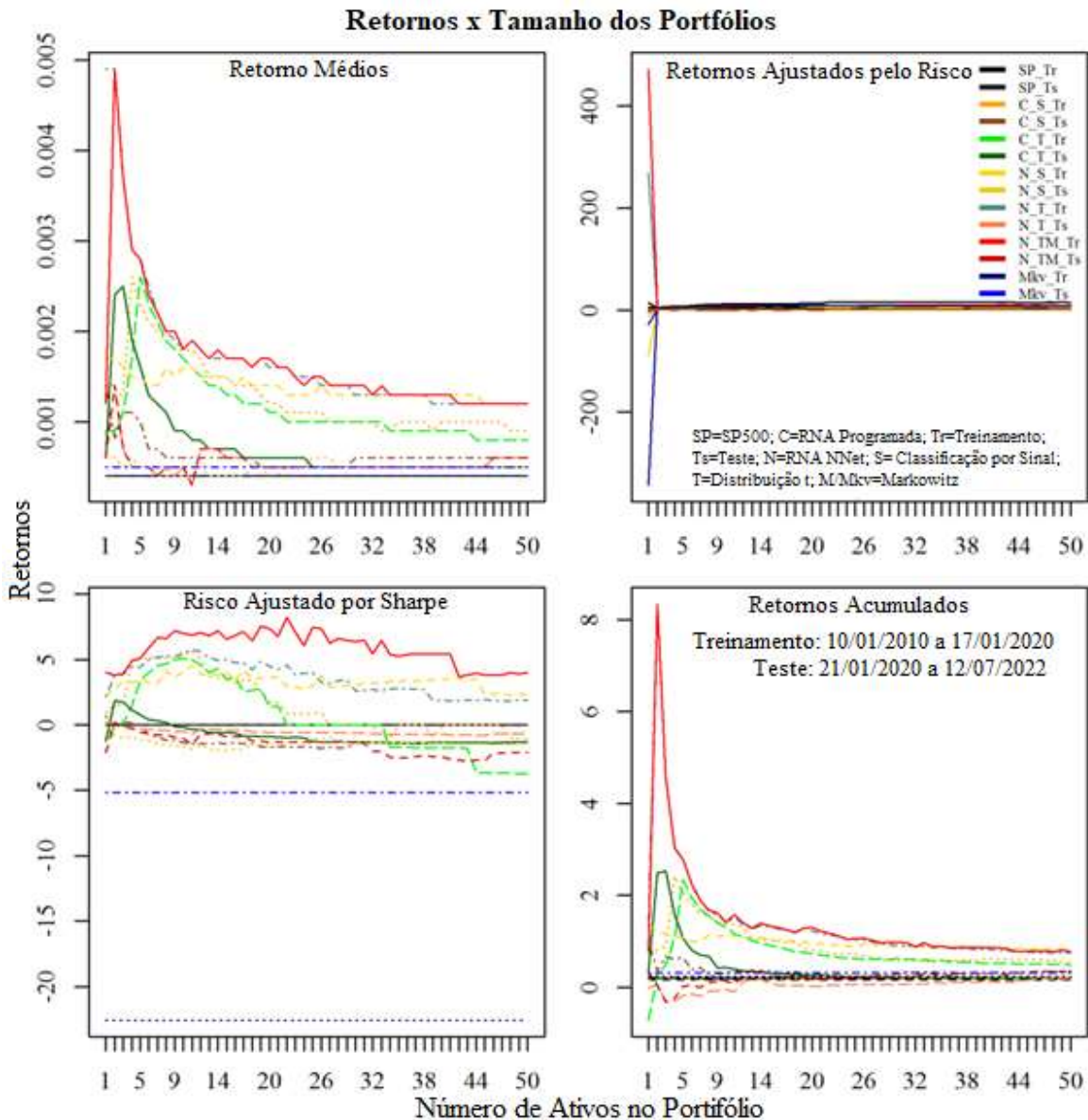
5.2 RESULTADOS DA VALIDAÇÃO DO EXPERIMENTO

Para eliminar a possibilidade de os resultados significativos obtidos na amostra piloto de modelagem serem coincidentes, conduziu-se o experimento em uma amostra maior e mais representativa, a qual representa a carteira do índice S&P500. Os resultados deste experimento ampliado são apresentados na Figura 13 que apresenta a análise do período de treinamento (10/01/2018 a 17/01/2020) e do período de teste (20/01/2020 a 12/07/2022) para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = \sum_{t=1}^T r_{Pf,t} / T$; o retorno esperado ajustado ao risco, $E(R_{Pf})_{Aj} = R_{Pf} / \sigma_{Pf}^2$; o retorno esperado ajustado por Sharpe $E(R_{Pf})_{Sharpe} = (R_{Pf} - R_f) / \sigma_{Pf}^2$; e o retorno esperado acumulado $E(RA_{Pf}) = (1 + R_{Pf})^T$ descritos na seção 3.2 da metodologia.

Os resultados da Figura 13 validam os resultados da amostra piloto experimental; foram

construídas 50 carteiras de investimentos com ativos variando de 1 a 50, aplicando RNAs e distribuições de probabilidade, e os resultados superaram os anteriores apresentados na seção 4.1.

Figura 13 - Retornos x Tamanho das Carteiras com Ativos S&P500.



Análise do período de treinamento Tr (10/01/2018 a 17/01/2020) e do período de teste Ts (20/01/2020 a 12/07/2022), para 14 modelos de formação de carteiras de investimentos, conforme descrito em legenda, para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf}/T$; o retorno esperado ajustado ao risco, $E(R_{Pf})_{Aj} = R_{Pf}/\sigma_{Pf}^2$; o retorno esperado ajustado por Sharpe $E(R_{Pf})_{Sharpe} = (R_{Pf} - R_f)/\sigma_{Pf}^2$; e o retorno esperado acumulado $E(RA_{Pf}) = (1 + R_{Pf})^T$, de 14 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Obteve-se a expectativa de retornos acumulados $E(RA_{Pf})$ em todo o período superior a 8 (800%), superando os retornos das carteiras S&P 500 e Markowitz. No subgrupo Treinamento

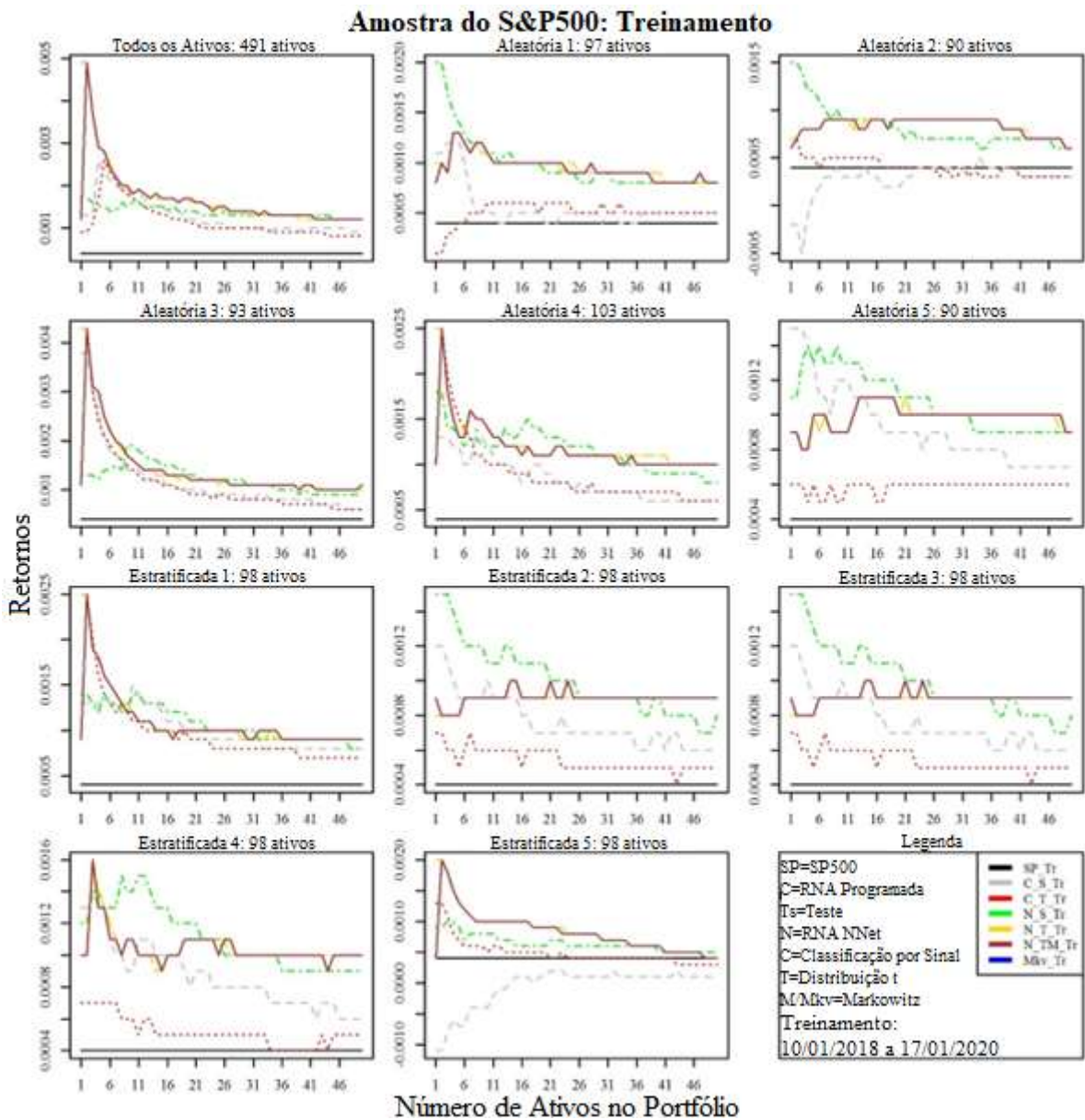
Tr , o método mais eficiente foi o configurado com a RNA gerada pelo pacote NeuralNet e classificação pela distribuição t de *Student*; ele teve o melhor desempenho em termos de retorno médio esperado $E(R)$, retorno médio ajustado pela variância $E(R_{Pf})_{Aj}$, retorno médio ajustado por Sharpe $E(R_{Pf})_{Sharpe}$ e os retornos acumulados $E(RA_{Pf})$.

No subgrupo Teste T_s da amostra piloto, os métodos de geração de portfólio que apresentaram resultados mais promissores foram aqueles com RNA criada manualmente com Classificação de Sinais C_T_Ts e RNA criada manualmente com classificação por distribuição t de *Student* (C_S_Ts).

O desempenho foi superior para carteiras menos diversificadas conforme indicado por pontos de inflexão significativos nas curvas até carteiras com 10 ativos, a partir das quais os retornos diminuem com uma inflexão menor. Tendências semelhantes foram observadas nos resultados do retorno médio esperado $E(R)$, no retorno ajustado por Sharpe $E(R_{Pf})_{Sharpe}$ e no retorno acumulado $E(RA_{Pf})$. O desempenho das carteiras ajustadas pela variância $E(R_{Pf})_{Aj}$ ocorre de forma análoga até 10 ativos com maior inflexão, atingindo um platô com 25 ativos. Além deste ponto, o aumento dos ativos na carteira não gera grandes reduções de risco.

O mesmo procedimento de criação de subamostras confirmatórias foi adotado e os resultados são apresentados na Figura 14 e Figura 15. Para facilitar a visualização, as informações das amostras de treinamento (T_r) foram separadas das amostras de teste (T_s). Na Figura 14, durante o período de treinamento T_r todas as amostras, aleatórias ou estratificadas, apresentaram maior expectativa de retorno $E(R_{Pf})$ na maioria das carteiras de investimento em comparação com a carteira do índice S&P500 e a carteira de variância mínima de Markowitz. Os portfólios gerados pelas RNAs, principalmente aqueles gerados por métodos sobrepostos (N_T_Tr e N_TM_Tr representado pelas Curvas Marrom e Amarela), superaram a sobreposição de SP_Tr e Mkv_Tr (representado pelas curvas pretas e azuis).

Os mesmos resultados são observados nas 11 amostras de teste (T_s) (*backtesting*) na Figura 15 que envolveu todos os ativos do S&P500, incluindo subamostras aleatórias e extraídas. Apesar do choque estocástico da Pandemia de Covid e de um período de testes mais longo, um terço a mais que o período de treinamento (Tr), o desempenho do método permaneceu satisfatório. Demonstrou mais uma vez o potencial para alcançar retornos $E(R_{Pf})$ superiores aos retornos da Carteira de benchmark S&P500 e retornos da carteira de Variância Mínima de Markowitz na maioria das 550 carteiras testadas na fase de validação. O desempenho foi ruim apenas nas subamostras Aleatório 1 e Estratificado 5 em relação às carteiras Mkv_Ts (representadas pelas Cores Azuis).

Figura 14 - Amostras S&P500 para validação de modelo em T_r treinamento.

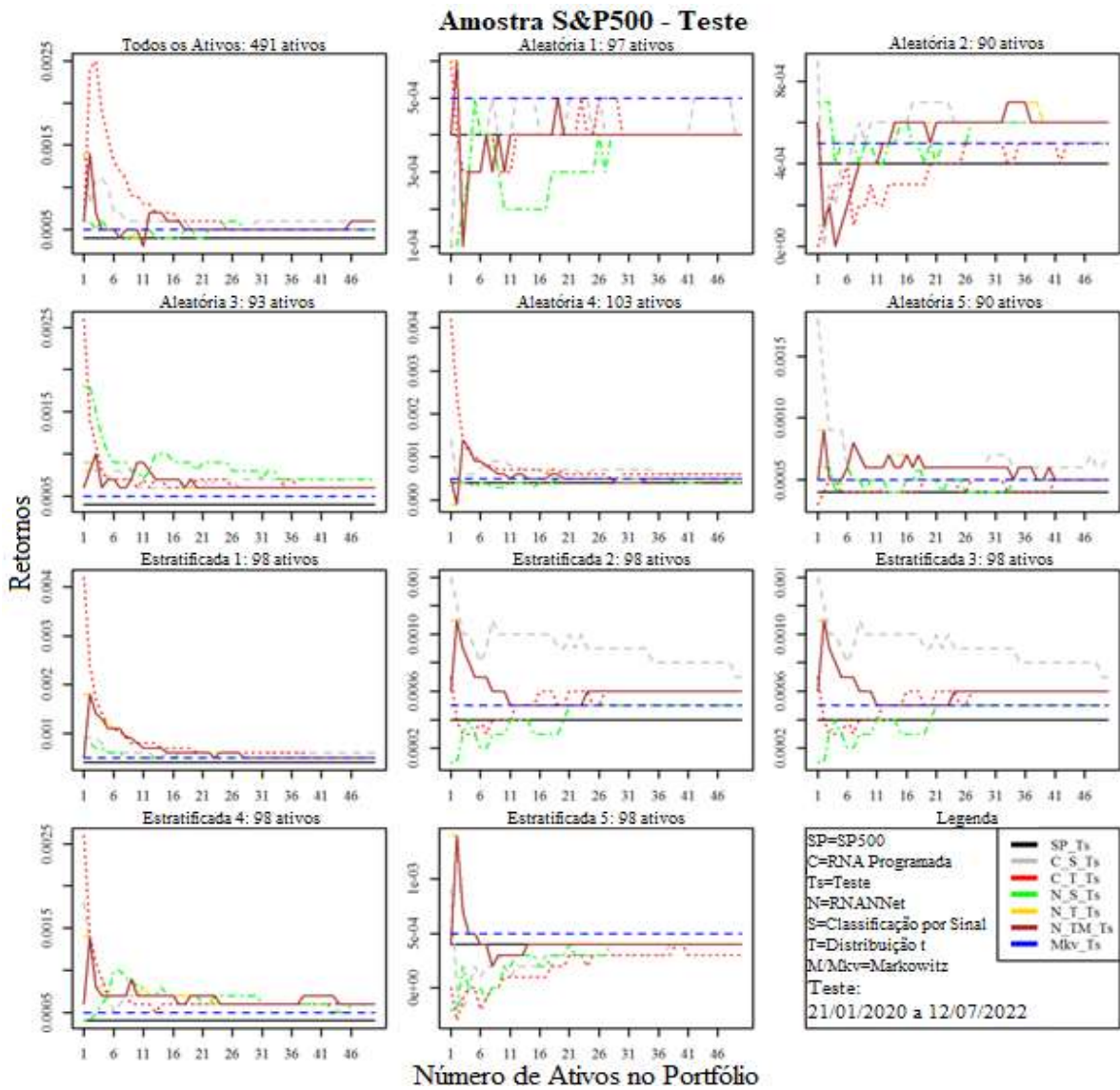
Análise do período de treinamento Tr (10/01/2018 a 17/01/2020), conforme descrito em legenda, para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf}/T$, de 7 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 490 ativos; nas 5 subamostras aleatórias com 97, 90, 93, 103 e 90 ativos dos 490 ativos; e nas 5 subamostras estratificadas com 98 ativos dos 490 ativos.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

A Figura 16 fornece um resumo da frequência com que diferentes métodos superaram o benchmark S&P500 e as carteiras de variância mínima de Markowitz. Nos 550 portfólios gerados durante o período de Treinamento, o método RNA do pacote NeuralNet com sinal e classificação por distribuição t de *Student* demonstrou desempenhos superiores. Esses métodos alcançaram expectativas de retornos $E(R_{portfolio})$ com desempenhos superiores em 100% e

99% das carteiras de investimentos Pf amostradas, com pesos w_s ingênuos $1/N$ (5: N_S_Tr : S&P500, 6: N_S_Tr : Markov, 7: N_T_Tr : S&P500 e 8: N_T_Tr : Markov). Em 98% dos casos foi observado desempenho ligeiramente inferior ao usar pesos w_s de mínima variância (9: N_TM_Tr : S&P500) e (10: N_TM_Tr : Markov).

Figura 15 - Amostras S&P500 para validação de modelo em T_s teste.



Análise do período de teste T_s (21/01/2021 a 12/07/2022), conforme descrito em legenda, para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf}/T$, de 7 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 490 ativos; nas 5 subamostras aleatórias com 97, 90, 93, 103 e 90 ativos dos 490 ativos; e nas 5 subamostras estratificadas com 98 ativos dos 490 ativos.

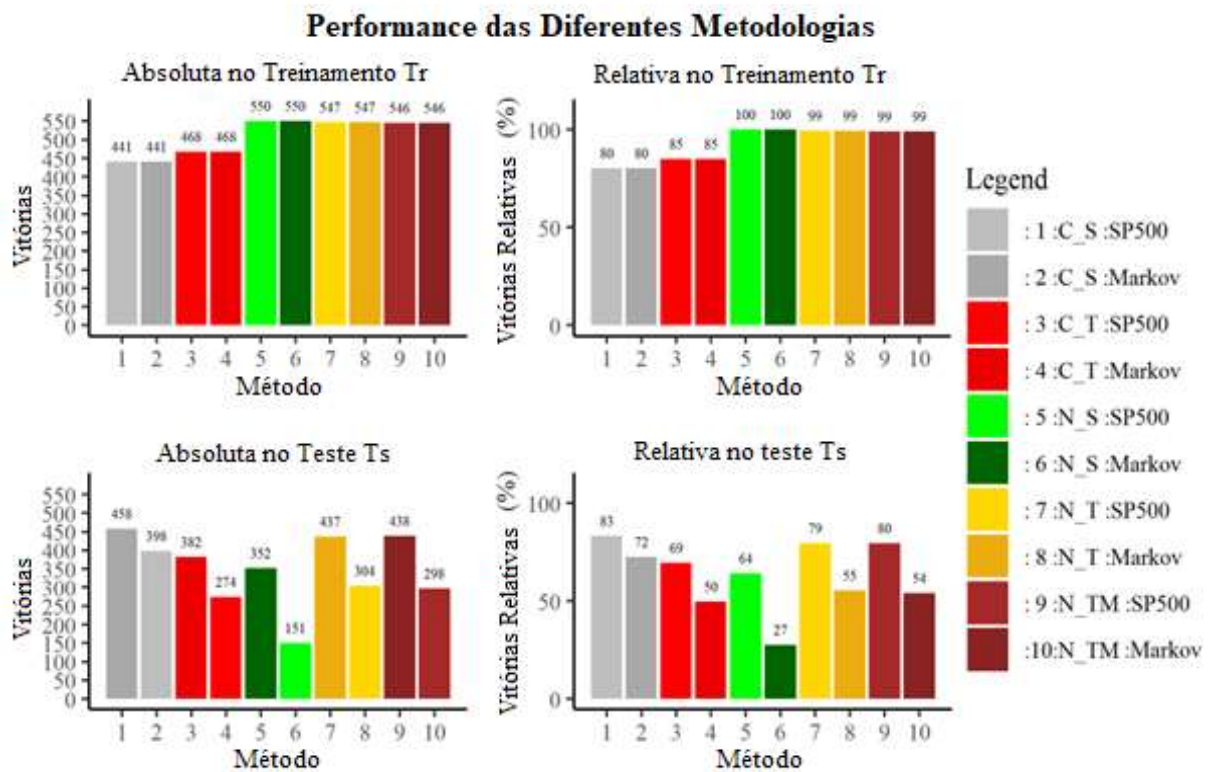
Fonte: Elaboração Própria (2024).

Durante o período de teste da validação foram amostradas as carteiras programadas manualmente com classificação de sinal (C_S) que superaram consistentemente as carteiras S&P500 e de mínima variância em 458 e 398 casos, o que representa 83% e 72%,

respectivamente.

O método RNA do pacote NeuralNet, utilizando a distribuição t de *Student*, mostrou-se melhor; com retornos esperados $E(R_{Pf})$ maiores que os retornos da carteira S&P500 e da carteira de variância mínima de Markowitz. O método RNA teve desempenho superior em 437 e 304 das 550 carteiras de investimento observadas com pesos ingênuos ($1/N$), representando 79% e 55%, respectivamente (7: N_T_Ts : S&P500 e 8: N_T_Ts : Markov). Além disso, ao empregar variante de método que adota pesos de mínima variância, a RNA apresentou desempenho superior em 438 e 298 casos, correspondendo a 80% e 54% usando a (9: N_TM_Ts : S&P500) e (10: N_TM_Ts : Markov).

Figura 16 - Desempenho dos métodos testados com a amostra de validação.



Frequência de vitórias absoluta e relativa (retorno maior que o benchmark carteira Markov ou carteira SP500) na análise do período de treinamento Tr (10/01/2018 a 17/01/2021) e do período de teste Ts (23/01/2021 a 12/07/2022), para o retorno médio esperado $E(R_{Pf}) = R_{Pf}/T$, de 14 modelos de carteiras de investimentos, oscilando a composição de 1 a 50 ativos em cada carteira na amostra de 490 ativos; nas 5 subamostras aleatórias com 97, 90, 93, 103 e 90 ativos dos 490 ativos; e nas 5 subamostras estratificadas com 98 ativos dos 490 ativos, totalizando 550 carteiras de investimentos analisadas.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Apesar dos retornos semelhantes obtidos pelas diferentes técnicas utilizadas na formação das carteiras de investimentos, a adoção de diferentes métodos de ponderação, como distribuir as carteiras com base em pesos $1/n$ ou utilizar pesos com variações mínimas, revela

diferenças estatisticamente significativas. Esses resultados são corroborados pelo teste t realizado para analisar a diferença média entre todos os métodos de formação de carteiras.

A Tabela 11 apresenta o resultado da análise dos fatores experimentais. Na fase de Modelagem, ao considerar o bias como fB e a *Classificação* como o fA , o efeito $ef(fA)$ resulta em um ganho de 1,48% no número de modelos ganhos em relação ao benchmark SP500 e de 15,83 em relação ao portfólio de variância mínima de Markov. Na fase de validação $ef(fA)$ há um ganho de 0,55% no número de vitórias em relação ao benchmark S&P500 e um ganho de 2,57% em relação à carteira de variância mínima de Markowitz. Considerando as duas fases de Modelagem e Validação, $ef(fA)$ gera um ganho médio de 3,37% no número de vitórias.

Tabela 11 - Análise do resultado do experimento.

Modelagem												
SP500					Ganho %	Markovitz					Ganho %	Média %
$fB = \beta_0$						$fB = \beta_0$						
fA		MC	NNet		$ef(fA)$		MC	NNet		$ef(fA)$		
<i>Classificação</i>	t	175	99	76	137	t	122	39	83	80,5		
	$S +$	154	112	42	133	$S +$	74	43	31	58,5		
		-21	13		4	1,48	-48	4		22	15,83	
	$ef(fB)$	164,5	105,5	-59		$ef(fB)$	98	41	-57			
Ganho %					-21,85	Ganho %					-41,01	
Validação												
SP500					Ganho %	Markovitz					Ganho %	Média %
$fB = \beta_0$						$fB = \beta_0$						
fA		MC	NNet		$ef(fA)$		MC	NNet		$ef(fA)$		
<i>Classificação</i>	t	382	437	-55	409,5	t	274	304	-30	289		
	$S +$	458	352	106	405	$S +$	398	151	247	274,5		
		76	-85		4,5	0,55	124	-153		14,5	2,57	3,37
	$ef(B)$	420	394,5	-25,5		$ef(B)$	336	227,5	-108,5			
Ganho %					-3,13	Ganho %					-19,25	
Média %						Média %					-16,35	

Fonte: Elaboração Própria (2024).

O $ef(fB)$ considerando fA na fase de Modelagem resulta em uma perda de -21,85% no número de vitórias para o nível RNA por NNet (FRITSCH et al., 2019) comparado ao nível da RNA com a configuração criada manualmente (C) neste estudo em relação ao benchmark SP500. Em relação à carteira de mínima variância, a perda é de -41,01%. Na fase de validação, $ef(fB)$ é -3,13% em relação ao benchmark SP500 e -19,25% em relação à carteira de variância

mínima do Markowitz. Em média, o $ef(fB)$, considerando β_0 como fB no experimento é de -16,35%, indicando que a configuração criada manualmente (MC) superou o desempenho da RNA configurada pelo pacote NeuralNet (NNet). Os resultados encontrados, confirmam a hipótese H1 do estudo.

5.3 TESTE DO DESEMPENHO DO MODELO ANN-t COM A CARTEIRA MF-DFA

Na Figura 17 apresentam-se os retornos acumulados das carteiras SP500, Markowitz, Sharpe, MF_Mkw, MF_Sharpe, ANN-t_Mkw e ANN-t_Sharpe onde os quatro gráficos comparam as carteiras tradicional, MF-DFA e ANN-t de acordo com o número de ativos incluídos (cinco, dez, quinze ou vinte ativos).

É possível observar que a carteira ANN-t_Sharpe entre todas as carteiras testadas obteve o maior desempenho acumulado no período de 21 de janeiro de 2020 a 12 de julho de 2022. A segunda carteira com maior retorno acumulado foi a carteira Sharpe e, depois, vieram as carteiras ANN-t_Mkw e MF_Sharpe, cada uma com maior retorno em duas das quatro amostras. Também podemos ver que as carteiras ANN-t tiveram desempenho inferior ao da carteira Markowitz durante o surto de COVID-19; mas isso foi da ordem de apenas alguns dias e em geral, as carteiras ANN-t são superiores em retornos 90% dos analisados período (Figura 17). É necessário observar o desempenho da carteira ANN-t em relação à sua carteira relativa e, nesse caso, podemos ver que a ANN-t Sharpe superou Sharpe e a ANN-t Mkw superou Markowitz para todas as quatro combinações de ativos da carteira.

A Tabela 12 apresenta o *backtesting* das carteiras individuais com base na quantidade de ativos incluídos.

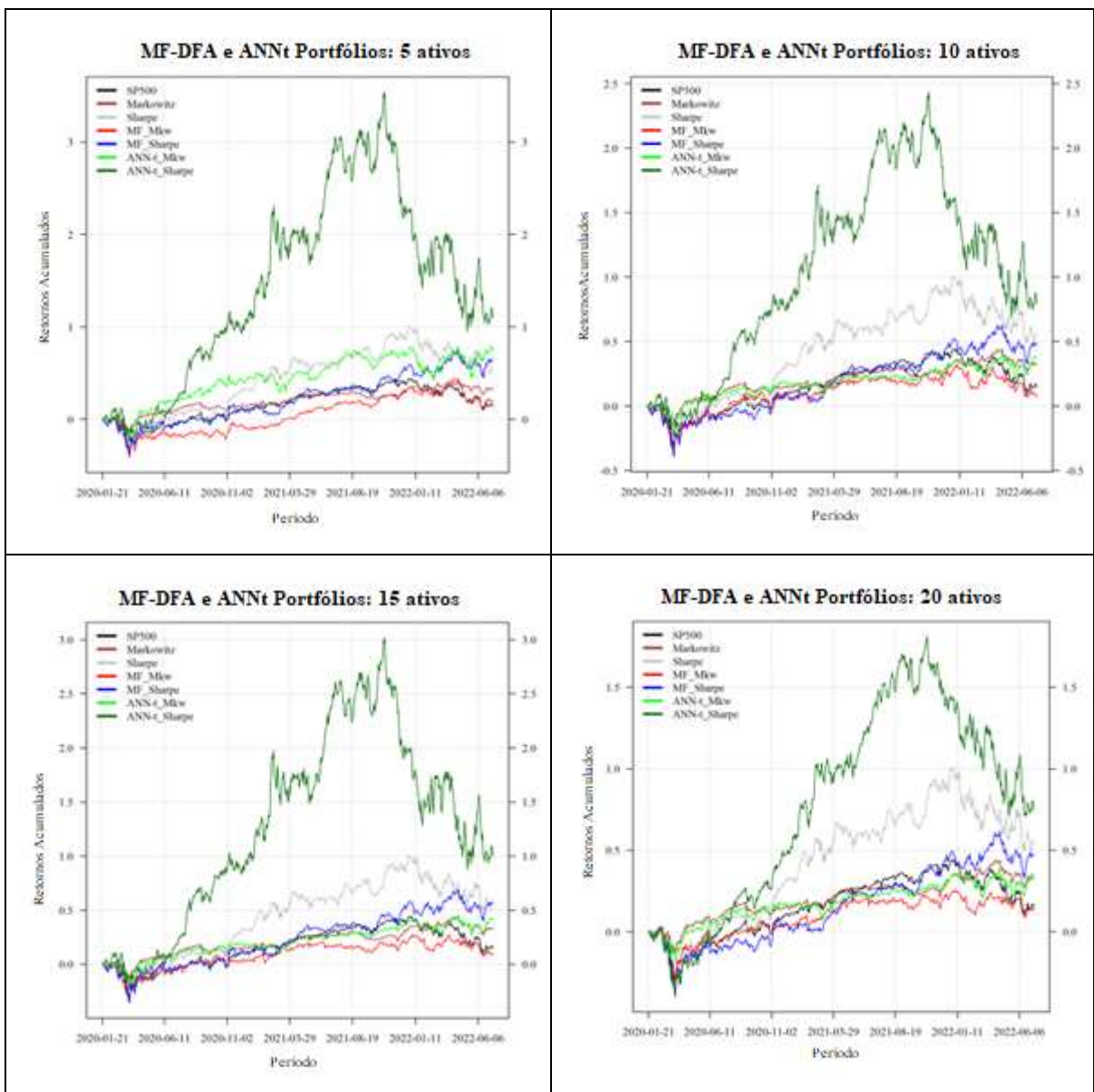
Os resultados do *backtesting* confirmam que, em termos de retorno, a carteira ANN-t_Sharpe de 5 ativos é a carteira que obteve o melhor desempenho. A carteira teve desempenho de 0,17% a.d., 34,84% a.a. e 109,63% p.p., respectivamente para \bar{r}_p , r_p^A e r_p^C .

Porém, as carteiras ANN-t_Sharpe com mais ativos incluídos também obtiveram resultados superiores. E a carteira com menor σ_p^A é a carteira Markowitz com desvio de 15,61, que também apresentou o menor $VaR_{1-\gamma}$ e $CVaR_{1-\gamma}$.

Em relação ao risco, Sp indica que a carteira ANN-t_Sharpe teve melhor desempenho em comparação às carteiras alternativas, sendo superior em três dos parâmetros “backtestados” para as carteiras consideradas, exceto para a carteira que inclui cinco ativos. Para este portfólio o ANN-t_Mkw é superior com valor de 0,81. A seguir *Sort* mostra que os melhores

desempenhos sob a ótica de risco e retornos oscilaram entre as carteiras ANN-t_Mkw e ANN-t_Sharpe, com valores de 0,09 e 0,08, respectivamente. Por outro lado, vale ressaltar também a volatilidade relativamente elevada das carteiras (Figura 17). Porém, se considerarmos esse risco no contexto dos retornos, os resultados apontam consistentemente para a maior eficiência das carteiras ANN-t. Esta constatação é ainda confirmada pelos índices de Sharpe e Sortino (Tabela 12).

Figura 17 - Comparação dos retornos acumulados dos portfólios com 5, 10, 15 e 20 ativos.



Fonte: Elaboração Própria (2024).

Com o valor beta de 0,60, a ANN-t_Mkw_15 é a segunda menos arriscada (ótima no *bear market*), e a ANN-t_Sharpe com cinco e quinze ativos tem os maiores valores de beta, 1,3

e 1,2 (excelente no *bull market*). Por fim, a carteira ANN-t_Sharpe apresenta α de desempenho superior com valores de 0,13, 0,11, 0,12 e 0,1, respectivamente em carteiras com cinco, dez, quinze e vinte ativos.

Tabela 12 - *Backtesting* dos portfólios selecionados.

Portfólio <i>backtesting</i>⁺										
Portfólio	\bar{r}_p	r_p^A	r_p^C	σ_p^A	$VaR_{1-\gamma}$	$CVaR_{1-\gamma}$	S_p	$Sort$	β	α
SP500	0.04	5.69	14.69	26.01	2.66	3.34	0.10	0.03	1.00	0.00
Markowitz	0.05	11.95	32.24	15.61**	1.57**	1.98**	0.57	0.07	0.48**	0.03
Sharpe	0.13	27.54	82.65	37.97	3.81	4.81	0.64	0.07	1.30	0.08
MF_Mkw_5	0.05	7.65	20.04	31.85	3.25	4.09	0.14	0.03	0.98	0.01
MF_Sharpe_5	0.11	23.56	68.85	34.04	3.42	4.32	0.60	0.07	0.99	0.07
ANN-t_Mkw_5	0.10	25.10	74.11	27.29	2.72	3.44	0.81**	0.09**	0.77	0.07
ANN-t_Sharpe_5	0.17**	34.84**	109.63**	51.73	5.19	6.55	0.61	0.08*	1.30	0.13**
MF_Mkw_10	0.02	2.96	7.49	25.76	2.64	3.32	-0.01	0.02	0.81	-0.01
MF_Sharpe_10	0.10	21.16	60.86	31.31	3.15	3.97	0.58	0.07	0.96	0.06
ANN-t_Mkw_10	0.06	13.56	37.02	20.75	2.09	2.64	0.50	0.07	0.60*	0.03
ANN-t_Sharpe_10	0.15	32.77	101.76	41.38	4.14	5.23	0.72*	0.08*	1.11	0.11
MF_Mkw_15	0.03	3.51	8.91	24.67	2.53	3.18	0.02	0.02	0.78	0.00
MF_Sharpe_15	0.06	6.74	17.52	42.80	4.37	5.50	0.08	0.03	1.30	0.02
ANN-t_Mkw_15	0.05	12.48	33.80	20.35*	2.05*	2.59*	0.46	0.06	0.62	0.03
ANN-t_Sharpe_15	0.16*	34.17*	107.07*	45.54	4.56	5.76	0.68	0.08*	1.20	0.12*
MF_Mkw_20	0.03	5.14	13.22	23.23	2.38	2.99	0.09	0.03	0.74	0.00
MF_Sharpe_20	0.08	15.37	42.49	30.81	3.12	3.93	0.4	0.05	0.99	0.04
ANN-t_Mkw_20	0.05	12.48	33.80	20.35*	2.05*	2.59*	0.46	0.06	0.62	0.03
ANN-t_Sharpe_20	0.14	30.62	93.75	39.91	4.00	5.05	0.69	0.08*	1.08	0.10

+ \bar{r}_p é o Retorno Médio; r_p^A é o Retorno Anualizado; r_p^C é o Retorno Acumulado; σ_p^A é a Volatilidade Anualizada; $VaR_{1-\gamma}$ é o Valor em Risco; $CVaR_{1-\gamma}$ é o Valor em Risco Condicional; S_p é o Índice de Sharpe; $Sort$ é o Índice de Sortino; β é o Beta; e α é o Alfa de Jensen.

** O superior \bar{r}_p , r_p^A , e r_p^C é a carteira ANN-t_Sharpe_5, com 0,17% a.d., 34,85% a.a., e 109,63% a.p.. O portfólio com o menor σ_p^A é a carteira de Markowitz, 15,61%. O menor $VaR_{1-\gamma}$ e $CVaR_{1-\gamma}$ é o portfólio de Markowitz, com 1,57 e 1,98%, respectivamente. O maior S_p é da carteira ANN-t_Mkw_5, com 0,81%. O superior $Sort$ é também a carteira ANN-t_MKW_5, com 0,09%. O menor β é o da carteira Markowitz, com o valor de 0,48. O melhor α é a carteira ANN-t_Sharpe_5 com 0,13%.

* O segundo maior \bar{r}_p , r_p^A , e r_p^C é a carteira ANN-t_Sharpe_15, com 0,16% a.d., 34,17% a.a., e 107,07% a.p. As carteiras com o Segundo menor σ_p^A são ANN-t_Mkw, 20,35%, com 15 e 20 ativos. O segundo menor $VaR_{1-\gamma}$ e $CVaR_{1-\gamma}$ são as carteiras ANN-t_Mkw, com 2,05 e 2,59, respectivamente, com 15 e 20 ativos. O segundo maior S_p é ANN-t_Sharpe_10, com 0,72%. O segundo superior $Sort$ são as carteiras ANN-t_Sharpe, com 0,08%, nas carteiras com 5, 10, 15 e 20 ativos. O segundo menor β é da carteira ANN-t_Mkw_15, com o valor de 0,60. O segundo melhor α é da ANN-t_Sharpe_15 com 0,12%.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Acompanhando os resultados, pode-se perceber que as carteiras ANN-t superaram o

MF-DFA e as carteiras clássicas (Markowitz, Sharpe e o índice S&P500), o que confirma a hipótese inicial. Isto confirma ainda que é possível obter eficiência dentro da ineficiência do mercado; ao aplicar técnicas eficientes como Markowitz e Sharpe em ativos que apresentaram ineficiência por excederem seus retornos aos retornos esperados. Acredita-se que a explicação para o melhor desempenho de uma carteira menor é o fato de a diversificação diluir o retorno.

Este estudo traz evidências de que a RNA-t é uma ferramenta poderosa para gerenciamento de risco da carteira de um investidor. Quanto ao risco ainda ser relativamente baixo, acredita-se que a explicação é que o modelo RNA-t captura as empresas que excedem o retorno de mercado. Os resultados, portanto, validam a hipótese H2 do estudo.

5.4 TESTE DO DESEMPENHO DO MODELO ANN-t COM A CARTEIRA *VALUE INVESTING* DA BERKSHIRE HATHAWAY

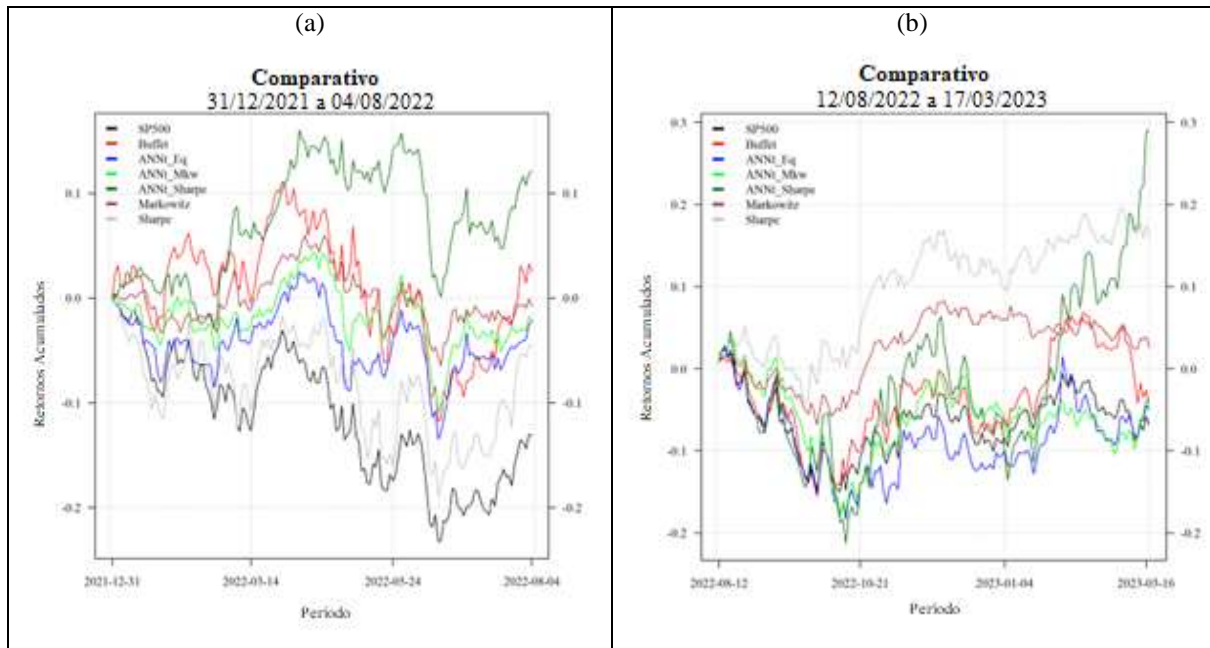
Nesta seção apresentam-se os resultados do teste comparando a técnica ANNt com a técnica *Value Investing*. A Figura 18 ilustra o desempenho das carteiras geradas pela ANNt, que incorpora a classificação dos ativos baseada na distribuição *t* de *Student*. As carteiras, nomeadamente ANNt_Eq, ANNt_Mkw e ANNt_Sharpe são comparadas com carteiras de referência; ou seja, as carteiras SP500, Buffett, Markowitz e Sharpe.

5.4.1 Perspectiva de curto prazo

Pela análise do intervalo de três meses, observa-se que a carteira ANNt_Sharpe apresenta o maior desempenho, embora seus retornos iniciais tenham sido ligeiramente inferiores. A carteira Buffet, por outro lado, obteve um desempenho consistentemente forte durante a maior parte do período analisado; perdendo, apenas, para a carteira ANNt_Sharpe em termos de retornos acumulados. Vale ressaltar que a carteira Buffet também apresentou maior nível de risco em comparação à carteira ANNt_Sharpe. O desempenho da carteira ANNt_Mkw foi muito semelhante ao da carteira Buffet, mesmo com lucros significativamente inferiores aos da carteira ANNt_Sharpe. A Figura 18a e a Figura 18b fornecem uma representação visual do menor risco associado ao portfólio ANNt_Mkw. No geral, estas conclusões destacam o desempenho superior da carteira ANNt_Sharpe, seguido pelo portfólio Buffet. A carteira ANNt_Mkw apresentou desempenho semelhante à carteira Buffet; porém, com menor rentabilidade.

A carteira ANNt_Sharpe apresentou desempenho superior no período analisado com r_p^C de 12,12% no final do período ante 2,47% de r_p^C (Tabela 13) da carteira Buffett, obtendo maiores retornos acumulados (Figura 18a). As descobertas são de extrema importância, pois validam os benefícios significativos do emprego desta abordagem de aprendizado de máquina no portfólio, o qual superou consistentemente o desempenho do mercado no longo prazo. Estes resultados desafiam os pressupostos subjacentes da Hipótese de Mercado Eficiente (EMH) e fornecem estudos anteriores que se concentraram, principalmente, na capacidade desta abordagem para otimizar o desempenho do mercado (OLIVEIRA; CERETTA; ALBRECHT, 2023).

Figura 18 - Comparação dos retornos acumulados de curto prazo das carteiras SP500, Buffet, ANNt_Eq, ANNt_Mkw, ANNt_Sharpe, Markowitz e max_Sharpe.



A Figura 18(a) apresenta a análise do período de vacinação entre 31/12/2021 e 04/08/2022. A Figura 18(b) apresenta a análise do período de vacinação entre 12/08/2022 e 17/03/2023. A linha preta é o retorno acumulado nos períodos do S&P500. A linha vermelha é o retorno acumulado da carteira Buffett. A linha azul é o retorno acumulado nos períodos da ANNt com pesos equalizados dos ativos. A linha verde clara é o retorno acumulado nos períodos da ANNt com pesos dos ativos definidos pela variância mínima de Markowitz. Verde escuro é o retorno acumulado em períodos com pesos de ativos definidos pelo retorno máximo de Sharpe por desvio padrão.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Na segunda série, incluindo o rebalanceamento de posições, obteve-se os mesmos resultados na carteira ANNt_Sharpe com desempenho superior, um r_p^C de 29,04% ao final do período (Tabela 13). ANNt_Sharpe supera a carteira Buffett em 725,86%, obtendo r_p^C (retorno acumulado) de -4,64% (Figura 18b). O portfólio resultante foi montado em ordem de probabilidade de $E(r_{t,exc})$; as ações escolhidas pela carteira treinada com maior probabilidade

$E(r_{t,s_{exc}})$ na primeira série temporal são XOM, ENPH, ADM, WRB, CVX, XRAY e TWTR (Figura 18a)⁴.

Tabela 13 - Avaliação de desempenho de carteiras parametrizadas pelo retorno e risco da amostra de *backtest* de curto prazo.

<i>Backtest</i> de Curto Prazo (149 dias analisados)							
Parâmetro	Portfólio						
	Buffet	SP500	ANNt_Eq	ANNt_Mkw	ANNt_Sharpe	Markowitz	Sharpe
\bar{r}_p	0,03*	-0,08	-0,01	-0,01	0,08**	0,00	-0,02
r_p^A	4,21*	-21.16	-3,58	-3,34	21h36**	-1,32	-7,73
r_p^C	2,47*	-13.12	-2.13	-1,99	12.12**	-0,78	-4,64
σ_p^A	25,93	24.23	18h15	16,91*	19h15	14.21**	28h47
$Var_{95\%}$	2,66	2,59	1,89	1,76*	1,90	1,47**	2,97
$CVar_{95\%}$	3,34	3.23	2,37	2,20*	2.40	1,85**	3,71
β	0,98	1,00	0,45	0,37*	0,34**	0,42*	1.08
S_p	0,04*	-1,00	-0,37	-0,38	0,95**	-0,31	-0,38
$Sort$	0,03*	-0,07	-0,01	-0,01	0,10**	0,00	-0,01
Try	0,02*	-0,09	-0,05	-0,05	0,21**	-0,03	-0,03
α	0,11**	0,00	0,02	0,01	0,10*	0,03	0,07
<i>Backtest</i> de Curto Prazo rebalanceado 2023 (149 dias analisados)							
\bar{r}_p	-0,02	-0,04	-0,02	-0,02	0,20**	0,02	0,11*
r_p^A	-7,67	-11h33	-8,33	-7,22	53,46**	4h40	28,74*
r_p^C	-4,64	-6,91	-5.05	-4,36	29.04**	2,60	16,22*
σ_p^A	25.44	22.12	27,56	22h59	37,4	12,95**	18.07*
$Var_{95\%}$	2,66	2.33	2,87	2,36	3,68	1,32**	1,77*
$CVar_{95\%}$	3.32	2,91	3,60	2,96	4,66	1,66**	2,24*
β	1.01	1,00	1.10	0,85	1,20	0,47**	0,65*
S_p	-0,42	-0,65	-0,42	-0,46	1,35*	0,10	1,42**
$Sort$	-0,02	-0,04	-0,02	-0,02	0,13*	0,04	0,15**
Try	-0,03	-0,05	-0,03	-0,04	0,15*	0,02	0,15**
α	0,02	0,00	0,02	0,01	0,25**	0,03	0,13*

O é o retorno médio \bar{r}_p , r_p^A é o Retorno Anualizado e r_p^C é o Retorno Cumulativo. σ_p^A é a volatilidade anualizada, Var_{95} é o valor em risco de 95%, $CVar_{95}$ é o valor em risco condicional de 95%, S_p é o índice de Sharpe, $Sort$ é o índice de Sortino, Try é o índice de índice de Treynor e α é o índice Alfa de Jensen. ** é o desempenho superior do parâmetro e * é o segundo desempenho superior do parâmetro.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Na segunda série temporal incluindo o rebalanceamento de posições, as ações escolhidas pela carteira treinada com maior probabilidade $E(r_{t,s_{exc}})$ são AKAM, ALGN, AEE,

⁴A carteira ANNt_Eq possui pesos de 0,14 em cada um dos sete ativos listados. A carteira ANNt_Mkw atribui os seguintes valores a cada ativo: 0,01, 0,00, 0,59, 0,10, 0,08, 0,18 e 0,04, respectivamente. A carteira ANNt_Sharpe possui pesos: 0,00, 0,00, 0,00, 0,00, 0,81, 0,13 e 0,06, demonstrando que os quatro primeiros ativos não melhoram o desempenho do índice de Sharpe na carteira apesar da maior probabilidade de retorno excessivo.

ANET, BAX, CTRA, GEN e JBHT (Figura 18b)⁵. Com base nestes resultados, as carteiras ANNt permitiram obter resultados muito satisfatórios mesmo durante um mercado baixista que durou a maior parte do período escolhido. Esses resultados destacam o valor agregado substancial ao incluir o reequilíbrio de carteiras em carteiras ANNt para gestores de carteiras.

Na comparação posterior, a carteira Buffett apresentou desempenho de 0,03% a.d., 4,21% a.a. e 2,47% a.p.. Nas métricas de risco, a carteira ANNt_Mkw teve desempenho superior às carteiras Buffett e S&P500 e inferior à carteira de Markowitz, obtendo desempenho de 16,91% a.a. em σ_p^A , 1,76% a.d., no VaR_95% e 2,20% a.d. no CVaR_95%. Além disso, obtemos o mais baixo β para a carteira ANNt_Sharpe que destacou a robustez dos resultados durante o período de baixa do mercado.

Os índices Sp , $Sort$ e Tr confirmaram a superioridade dos desempenhos acompanhando as descobertas de curto prazo (MORRIS; COMEAU, 2020; ZHANG; CHU; SHEN, 2021). No entanto, estende-se estes métodos empregando dependência assimétrica, uma vez que foi confirmado que beneficia carteiras financeiras (STOYANOV et al., 2011). A carteira ANNt_Sharpe obteve os maiores valores dos índices Sharpe (0,95% a.a.), Sortino (0,10% a.a.) e Treynor (0,21% a.a.) para cada 1% a.a. de risco aumentado. Por outro lado, o desempenho do α da carteira Buffet foi 1% maior que o α da carteira ANNt_Sharpe.

Além disso, trouxe evidências de que o método proposto é muito melhor que as carteiras Buffett e SP500 quando se considera o rebalanceamento para o *backtest* de curto período na segunda série de dados (Tabela 13).

Para a carteira ANNt_Sharpe, o retorno médio foi de 0,20% a.d. com retorno anualizado de 53,46% a.a., e o valor de 29,04% a.p. para retorno acumulado nos 149 dias analisados; os quais foram seguidos pela carteira ANNt_Mkw e ANNt_Eq. Obteve-se β mais baixo para a carteira ANNt_Mkw seguida pela ANNt_Markowitz, o que sugere menor sensibilidade ao mercado mesmo que os retornos sejam maiores.

Os retornos da carteira Buffett foram -0,02% a.d., -7,67% a.a. e -4,64% a.p., respectivamente para \bar{r}_p , r_p^A e r_p^C (Tabela 13). A segunda amostra de teste, incluindo a tendência de baixa, confirma os resultados da anterior nas métricas de risco; pois, na carteira ANNt_Mkw o risco supera as carteiras Buffett e S&P500 e apresenta desempenho inferior ao da carteira Markowitz.

⁵A carteira ANNt_Eq possui pesos de 0,125 em cada um dos sete ativos listados. A carteira ANNt_Mkw atribui os seguintes valores a cada ativo: 0,09, 0,00, 0,59, 0,16, 0,16, 0,18, 0,00 e 0,00. A carteira ANNt_Sharpe tem peso de 1,00 na ANET e 0,00 nas demais, respectivamente, demonstrando que os três primeiros ativos não melhoram o valor do índice de Sharpe na carteira apesar da maior probabilidade de retorno excedente.

A ANNt_Mkw apresentou desempenho de 22,59% a.a., 2,36% a.d. e 2,96% a.d., respectivamente para σ_p^A , VaR_95% e CVaR_95%. Obteve-se índices *Sp*, *Sort* e *Try* superiores para a carteira Sharpe e para a carteira ANNt_Sharpe, com valores de 1,42% a.a., 0,15% a.a. e 0,15% a.a. para cada 1% a.a. de aumento de risco (carteira Sharpe); e os valores de 1,35% a.a., 0,13% a.a. e 0,15% a.a. para cada 1% a.a. de risco aumentado (carteira ANNt_Sharpe). Ademais, as relações risco/retorno são complementadas pelo valor de α (0,25% a.a.) que é superior à carteira ANNt_Sharpe. Estes resultados são cruciais no contexto da redução de quase 15% do S&P 500 durante o mesmo período (Figura 18).

5.4.2 Perspectiva de longo prazo

Quando se validou a perspectiva de longo prazo (Figura 19), pode-se ver mais confirmações do valor agregado das carteiras ANNt. O portfólio ANNt_Sharpe domina em r_p^C mesmo durante o investimento no longo prazo; esta carteira obteve rentabilidade de 431,30% a.a. superando as carteiras alternativas (Tabela 14). Apesar da elevada volatilidade da carteira apresentada na figura, esta volatilidade segue uma trajetória de retornos superiores aos do mercado; onde, mesmo os piores retornos acumulados da carteira ANNt_Sharpe, foram muito superiores aos maiores retornos das demais carteiras. Oliveira, Ceretta e Albrecht (2023) argumentam que as carteiras ANNt poderiam ser mais voláteis; porém, essas carteiras ainda alcançam melhores valores de índices comparando o risco ao retorno.

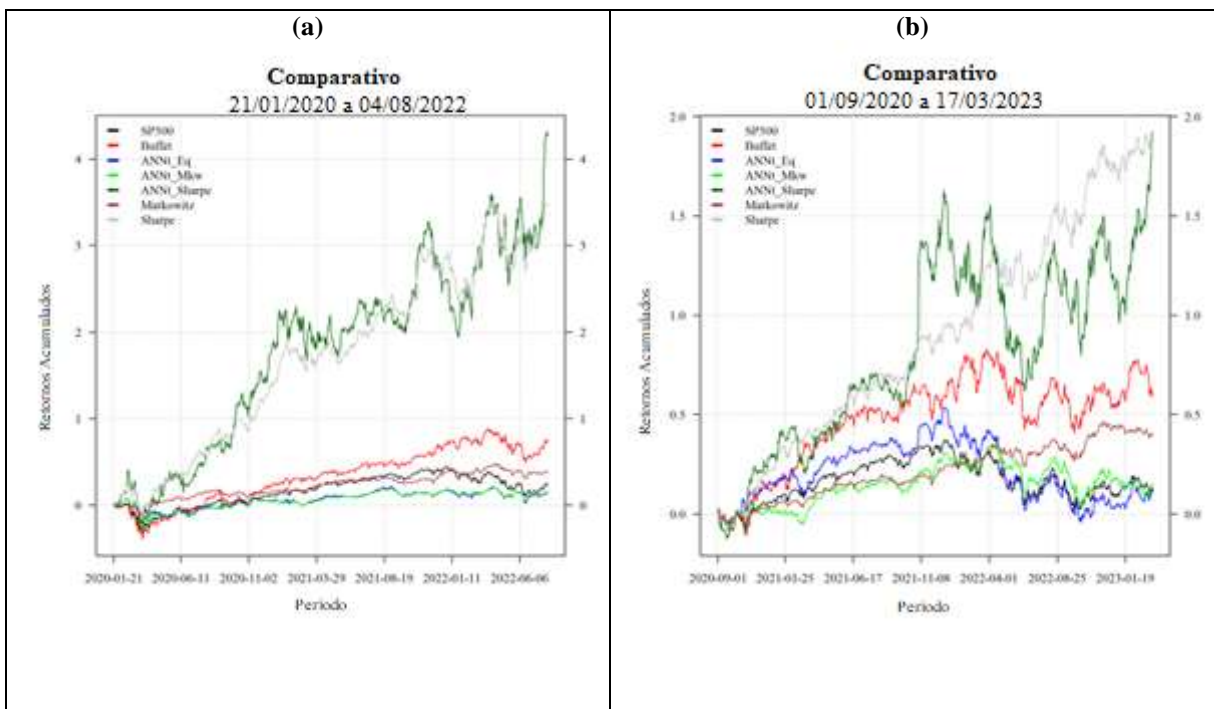
Os retornos excessivos da carteira ANNt_Sharpe (retorno de 192,25% a.a.) confirmam ainda mais Figura 19b que apresenta as carteiras com o rebalanceamento das ações; mesmo que o valor indique uma volatilidade mais elevada, ele é seguido por retornos mais elevados, alargando os resultados de Oliveira, Ceretta e Albrecht (2023) que geraram os portfólios de aprendizado de máquina treinados em desempenho de mercado. Além disso, a carteira Sharpe é formada a partir dos valores reais do período de teste, enquanto as carteiras ANNt são geradas no período de treinamento, quando o período de teste ainda é desconhecido. Aqui, as carteiras alternativas obtiveram retornos absolutos significativamente mais baixos com parâmetros de risco mais elevados (Tabela 14).

Os resultados do *backtesting* de longo prazo cobrindo 2022 confirmam que o método proposto contribui para a criação de carteiras que superam os outros benchmarks (Buffett, SP500 e Markowitz), obtendo rentabilidade de 431,30% a.a. (carteira ANNt_Sharpe) (Tabela 14). Da mesma forma que resultados de *backtesting* anteriores, a carteira Markowitz apresentou

a menor volatilidade anualizada (15,69% a.a.) quando o menor valor entre as carteiras ANNt foi obtido para a carteira ANNt_Mkw (23,39% a.a.), ainda superando o valor da carteira Buffett (31,81% a.a.).

Pode-se observar os mesmos resultados para o *Value at Risk* e o *Conditional Value at Risk* que obtiveram valores de 2,39% e 3,01%, superando o desempenho da carteira Buffett (os valores de 3,19% e 4,03%). A carteira Markowitz traz evidências sobre a menor sensibilidade à avaliação de mercado seguida pela carteira ANNt_Eq com valores β de 0,49 e 0,71 (Tabela 14); portanto, Markowitz confirmou o seu perfil de baixo risco.

Figura 19 - Comparação dos retornos acumulados de longo prazo das carteiras SP500, Buffett, ANNt_Eq, ANNt_Mkw, ANNt_Sharpe, Markowitz e max_Sharpe.



A Figura 19(a) apresenta a análise do período de vigência entre 21/01/2020 e 04/08/2022. A Figura 19(b) apresenta a análise do período de vigência entre 01/09/2020 e 17/03/2023. A linha preta é o retorno acumulado nos períodos do S&P500. A linha vermelha é o retorno acumulado da carteira Buffett. A linha azul é o retorno acumulado nos períodos da ANNt com pesos equalizados dos ativos. A linha verde clara é o retorno acumulado nos períodos da ANNt com pesos dos ativos definidos pela mínima variância de Markowitz. Verde escuro é o retorno acumulado em períodos com pesos de ativos definidos pelo retorno máximo de Sharpe por desvio padrão.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Oliveira, Ceretta e Albrecht (2023) encontraram padrões semelhantes para a amostra de treinamento do S&P500, o que indica que as carteiras ANNt podem ser adequadas especialmente para cobrir a parte dinâmica dos ativos alocados. Então obteve-se superior *S*, *Sort*, e *Tr* índices para o portfólio Sharpe e o portfólio ANNt_Sharpe com os valores de 2,49% a.a., 0,19% a.a. e 0,26% a.a. para cada 1% a.a. de risco aumentado. Para a carteira ANNt_Sharpe obteve-se valores de 1,74% a.a., 0,15% a.a. e 0,24% a.a. para cada 1% a.a. de risco aumentado

e o valor superior α é da carteira ANNt_Sharpe (valor de 0,26% a.a.) (Tabela 14).

Além disso, a Tabela 14 fornece os resultados do *backtesting* para a carteira rebalanceada investida de longo prazo durante 2023. Ao longo do ano, ANNt_Sharpe confirmou a robustez dos resultados em todos os parâmetros de retorno, enquanto a carteira Markowitz foi a menos volátil (11,27% a.a.). No entanto, as carteiras ANNt superaram a carteira de Buffett em volatilidade anualizada, Valor em Risco, Valor em Risco Condicional, bem como nos índices que comparam risco e retorno.

Tabela 14 - Avaliação de desempenho de carteiras parametrizadas pelo retorno e risco da amostra de *backtest* de longo prazo.

<i>Backtest</i> de longo prazo 2022 (641dias analisados)							
Parâmetro	Portfolio						
	Bufê	SP500	ANNt_Eq	ANNt_Mkw	ANNt_Sharpe	Markowitz	Sharpe
\bar{r}_p	0,11	0,05	0,03	0,03	0,31**	0,06	0,25*
r_p^A	24h29	9.06	5,82	5,93	92,82**	13h60	79,80*
r_p^C	73,87	24h70	15h49	15,78	431,30**	38h30	344,70*
σ_p^A	31,81	25,88	24.04	23,39*	51,68	15,69**	30,74
$Var_{95\%}$	3.19	2,63	2,46	2,39*	5.04	1,57**	2,93
$CVaR_{95\%}$	4.03	3.32	3.09	3,01*	6.40	1,98**	3,74
β	1,15	1,00	0,71*	0,72	1,28	0,49**	0,93
S_p	0,67	0,23	0,11	0,12	1,74*	0,67	2,49**
$Sort$	0,08	0,04	0,03	0,03	0,15*	0,08	0,19**
Try	0,08	0,04	0,03	0,03	0,24*	0,09	0,26**
α	0,05	0,00	0,00	0,00	0,26**	0,03	0,21*
<i>Backtest</i> de longo prazo rebalanceado 2023 (641dias analisados)							
\bar{r}_p	0,08	0,02	0,03	0,03	0,20**	0,05	0,17*
r_p^A	19.96	4,52	4.26	5.4	52,54**	13,84	50,69*
r_p^C	58,74	11.89	11.18	14.28	192,25**	38,99	183,34*
σ_p^A	25.37	19.16	22h34	17,47*	38,52	11.27**	18h32
$Var_{95\%}$	2,54	1,96	2.29	1,78	3,80	1.11**	1,73*
$CVaR_{95\%}$	3.21	2,46	2,88	2.24	4,81	1,41**	2,21*
β	1.01	1,00	0,95	0,65*	1.31	0,44**	0,75
S_p	0,62	0,01	0,00	0,07	1,25*	0,85	2,53**
$Sort$	0,08	0,03	0,03	0,03	0,14*	0,11	0,23**
Try	0,07	0,01	0,01	0,02	0,14*	0,09	0,20**
α	0,06	0,00	0,00	0,01	0,17**	0,03	0,15*

O \bar{r}_p é o retorno médio, r_p^A é o Retorno Anualizado e r_p^C é o Retorno Cumulativo. σ_p^A é a volatilidade anualizada, Var_{95} é o valor em risco de 95%, $CVaR_{95}$ é o valor em risco condicional de 95%, S é o índice de Sharpe, $Sort$ é o índice de Sortino, Try é o índice de índice de Treynor e α é o índice Alfa de Jensen.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

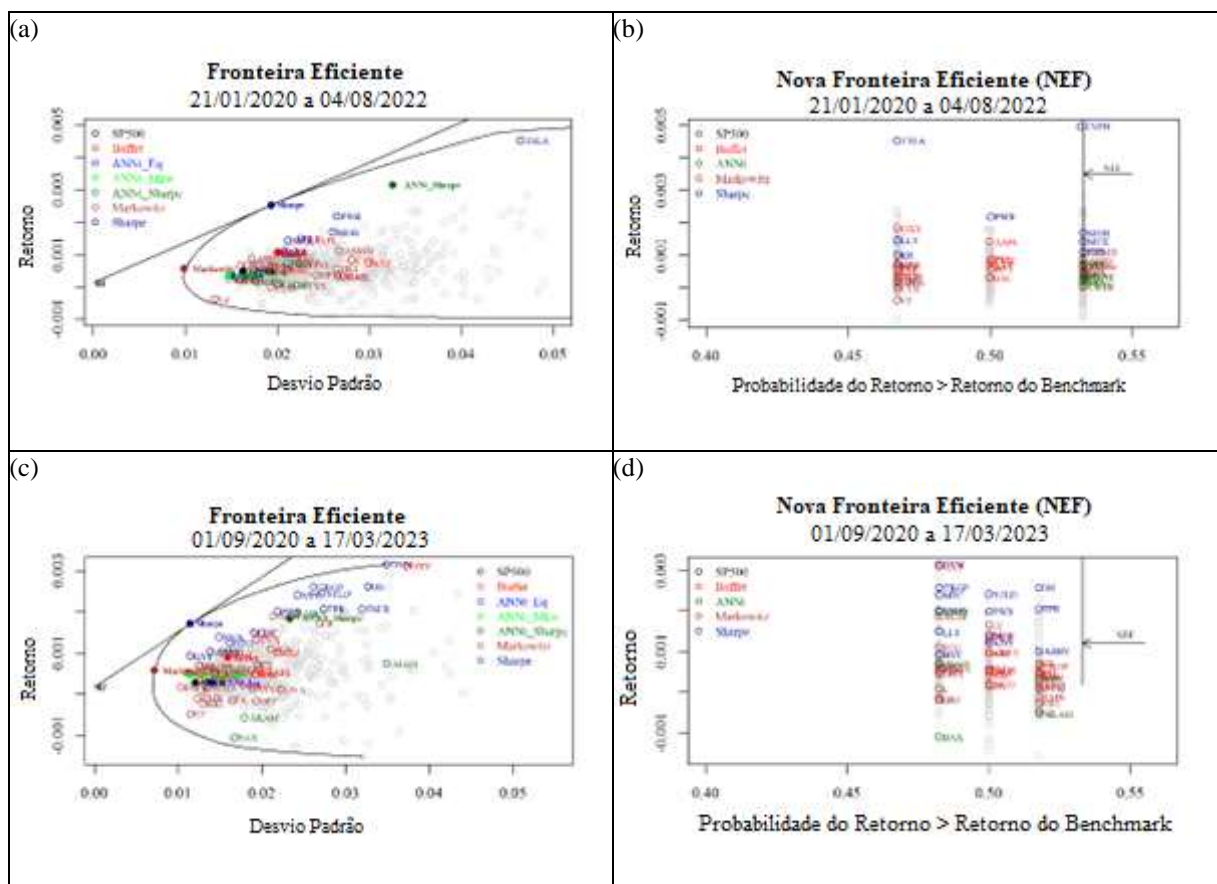
Após uma investigação detalhada, conclui-se que a carteira de Buffett, como representante de uma carteira de longo prazo com desempenho superior ao mercado, poderia

ser complementada pelo conceito de Rede Neural Artificial por meio da inclusão de distribuições de cauda longa e dependência assimétrica à medida que se confirmou a superioridade dos parâmetros de risco e de retorno.

5.4.3 Conceito de fronteira eficiente

As Figura 20(a) e Figura 20(c) ilustram os resultados para a fronteira eficiente de Markowitz; a primeira série vai de 21 de janeiro de 2020 a 04 de agosto de 2022, enquanto a segunda série representa a carteira com rebalanceamento de 01 de setembro de 2020 a 17 de março de 2023.

Figura 20 - Fronteira eficiente e técnica alternativa para seleção de carteiras utilizando ANNT.



A Figura 20(a) apresenta a Fronteira Eficiente entre 21/01/2020 e 04/08/2022. A Figura 20(b) apresenta a Nova Fronteira Eficiente (NEF) proposta entre os mesmos períodos. A Figura 20(c) apresenta a Fronteira Eficiente no período de rebalanceamento, composta entre 01/09/2020 e 17/03/2023 e a Figura 20(d) apresenta a Nova Fronteira Eficiente (NEF) proposta para este mesmo período.

Fonte: Elaboração Própria (2024).

Já as Figura 20(b) e Figura 20(d) ilustram o cálculo de uma nova fronteira eficiente que captura a relação entre o retorno e a probabilidade de exceder o benchmark de avaliação de investimento com base na distribuição *t* de Student. Distingue-se, então, carteiras antes e depois

do rebalanceamento. Esses números oferecem uma alternativa intrigante para avaliação de ativos na seleção de carteiras utilizando o método quantitativo de investimento ANNt que introduz o conceito de uma nova fronteira eficiente baseada em probabilidades e retornos. Os ativos posicionados mais à direita na Figura 20(b) e na Figura 20(d) são considerados mais adequados para seleção de carteira.

As descobertas indicam que o método proposto supera as carteiras de Buffett, S&P500, Markowitz e Sharpe em termos de retornos. Além disso, a carteira ANNt_Sharpe apresenta características de risco superiores em comparação às carteiras S&P500 e Sharpe. Da mesma forma, as carteiras ANNt_Mkw e ANNt_Eq visam superar a técnica de investimento em valor representada pela carteira de Buffett. Esses resultados elaboram as descobertas de (OLIVEIRA; CERETTA; ALBRECHT, 2023) que também empregou o método ANNt para superar uma carteira multifractal, melhorando os desempenhos de Markowitz, S&P500 e Sharpe. Os resultados portanto, confirmam a hipótese H3 do estudo.

O estudo anterior destacou as vantagens da nova abordagem de aprendizado de máquina no ajuste fino dos parâmetros do portfólio para melhorar o desempenho do mercado. No entanto, esta investigação desafia os pressupostos da EMH ao demonstrar valor acrescentado mesmo na carteira que tem consistentemente superado o desempenho do mercado a longo prazo.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo contempla as conclusões e considerações finais do presente estudo e está estruturado em três seções. A primeira seção apresenta as considerações finais do estudo com foco nos principais resultados e as consequentes decisões referentes às hipóteses teóricas propostas. Na segunda seção, apresentam-se as principais contribuições da presente pesquisa para a literatura teórico-empírica e suas implicações práticas; e, por fim, a terceira seção contempla os aspectos limitantes do presente estudo, assim como sugestões para pesquisas futuras.

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente tese teve como objetivo geral desenvolver um procedimento metodológico que permita a criação de carteiras de forma inovadora com o uso de Redes Neurais Artificiais e distribuição de probabilidade com caudas longas.

Conduziu-se um estudo experimental que investiga a aplicação de redes neurais artificiais (RNAs) e ranking de probabilidade na construção de carteiras de investimentos. Considerou a formação de portfólio como um problema de classificação ao aproveitar o poder das RNAs para analisar interações não lineares que podem ser atribuídas para tomar decisões informadas sobre a composição do portfólio. A abordagem de modelagem utiliza o retorno defasado de ativos como informação para prever o retorno das ações e formar carteiras de investimento, o que evita a necessidade de pesquisar o número de variáveis preditoras de múltiplas categorias de dados financeiros.

Entre as múltiplas configurações de modelo examinadas neste estudo, o modelo mais consistente durante a fase de modelagem foi o método RNA calibrado manualmente, integrando distribuição de probabilidade leptocúrtica assimétrica com o uso da distribuição t de *Student* como técnica de classificação na construção de portfólio. Para avaliar a distribuição t de *Student* adotada como configuração, realizou-se uma avaliação abrangente desta abordagem relativa à classificação de sinais adotada por Morris & Comeau (2020). A classificação baseada na distribuição t de *Student* superou a classificação de sinal em uma média de 3,37% nas carteiras da amostra. Este método envolveu classificar os ativos para composição da carteira de acordo com a probabilidade de seus retornos excedentes serem maiores que zero. Em nosso experimento empregou-se RNAs individuais para cada um dos ativos do S&P500 e construímos carteiras de maneira contínua (1 a 50 ativos por carteira)

em vez de intervalos fixos comumente encontrados na literatura. Para avaliar esse método, foram realizados testes em subamostras aleatórias e estratificadas. Esta combinação de técnicas constituiu uma novidade na literatura atual.

O resultado mostra que, na fase de modelagem, o modelo superou a construção do portfólio de referência S&P500 em 122 dos 188 casos amostrados, representando o retorno superior em 65% dos casos. Na fase de validação, os portfólios gerados pelo método RNA parametrizada manualmente, juntamente com a classificação pelo método dos Sinais de Morris & Comeau (2020), exibiram os resultados mais consistentes nas amostras de teste. Essa configuração superou 398 dos 550 casos amostrados, representando aproximadamente 72% dos casos. Desta forma, a hipótese H1 de que é possível aplicar RNA com êxito foi confirmada.

Também comparou-se as carteiras MF-DFA e ANN-t com carteiras tradicionais como S&P500, Sharpe ou Markowitz. Estendeu-se a abordagem atual de RNA pela distribuição de ativos de acordo com assimetrias de seus retornos para confirmar a hipótese de que a abordagem RNA-t é mais eficiente que o MF-DFA e as carteiras tradicionais. Foram criadas quatro carteiras de acordo com o número de ativos incluídos e descobriu-se que os resultados suportam a abordagem na maioria dos parâmetros utilizados no *backtesting*. Os resultados, portanto, confirmaram a hipótese H2.

Neste estudo, igualmente alcançou-se com sucesso o objetivo de comparar a técnica ANNt de geração de portfólios com a técnica de *Value Investing*, uma vez que as carteiras geradas através do método proposto superaram consistentemente a carteira de referência de Buffett que representa investimento em valor conforme estabelecido por Graham (GRAHAM, 1962). A técnica RNA, combinada com o uso de probabilidades leptocúrticas assimétricas, provou ser altamente eficiente, proporcionando desempenho consistente em diferentes distribuições de peso, incluindo pesos equitativos (ANNt_Eq), variância mínima de Markowitz (ANNt_Mkw) e Sharpe máximo (ANNt_Sharpe). Esses resultados são válidos tanto para amostras de treinamento com mercado em alta (*bullish*) quanto para amostras de teste com mercado em baixa (*bearish*), demonstrando a robustez da abordagem e confirmando a hipótese H3.

6.2 CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO

Este estudo contribuiu para a discussão teórico-empírica sobre a formação de carteiras de investimento.

Em comparação com outras abordagens, observou-se que o próprio método de classificação de sinais teve um desempenho insatisfatório tanto na fase de modelagem quanto na fase de validação. A configuração com viés β_0 do pacote NeuralNet (NNet) de Fritsch et al. (2019) superou o benchmark em 60% e 64% dos casos nas fases de modelagem e validação, respectivamente. No entanto, superou a carteira de variância mínima em apenas 23% e 27% dos casos, respectivamente. O que converge tanto nos resultados da modelagem quanto na validação é que as RNAs mais simples produziram resultados mais eficientes; McCulloch & Pitts (1943) introduziram a forma mais simples de RNA sem viés β_0 e, com base nos resultados experimentais, exibiram desempenho superior em média 16,35%.

Testes de desempenho dos retornos e do risco foram conduzidos tanto nos dados, nas carteiras do S&P500 e de Markowitz, como no modelo RNA-t, examinando especificamente o impacto do choque estocástico atribuído como sendo causado pela pandemia de Covid. Além disso, desafiou-se o modelo fazendo previsões em uma série de testes que era um terço maior que a série de treinamento usada para gerar os pesos sinápticos da RNA. Apesar destes testes, o modelo RNA-t superou os retornos da carteira de mercado S&P500 em 79% dos casos. Em comparação com a popular carteira de variância mínima de Markowitz, alcançou um melhor perfil de risco-retorno em 55% das 550 carteiras de investimento testadas. Embora os resultados obtidos pela distribuição uniforme dos pesos dos ativos nas carteiras de forma ingênua ($1/N$) ou pela minimização da variância sejam próximos, a diferença estatística existe nos retornos esperados das carteiras.

As descobertas demonstraram significativa diferença de performance e forneceram fortes evidências da eficácia da abordagem de classificação de ativos por RNA-t, com desempenho superior dos portfólios RNA-t em relação a carteira de referência S&P500. Embora os resultados tenham implicações promissoras para o mercado financeiro, há espaço para uma exploração mais aprofundada, tal como a realizada por (OLIVEIRA; CERETTA; ALBRECHT, 2023). Isso inclui investigar vários métodos para classificação de ativos, otimizar configurações de modelos, explorar diferentes tipologias e arquiteturas de RNA, e abordar a complexidade computacional. Estas áreas representam domínios de investigação de ativos e em rápida evolução, as quais têm o potencial de superar as realizações das descobertas apresentadas.

O presente estudo ainda contribuiu para o fluxo recente da literatura com a confirmação da hipótese da ineficiência do mercado americano, uma vez que foi possível obter retornos acima das expectativas pelo trade-off retorno/risco do MF-DFA, S&P500, Markowitz e Sharpe, com o novo método ANN-t.

Outra contribuição significativa deste trabalho reside na obtenção de evidências que demonstram que o investimento quantitativo, utilizando o método ANN-t, pode superar o desempenho de carteiras representativas de investimento em valor que analisam fundamentos econômicos e financeiros de avaliação das companhias. Além disso, a introdução de um novo conceito de fronteira eficiente baseado na probabilidade de retornos de cauda longa assimétrica mostra a sua superioridade sobre os valores de referência de retorno tradicionais. Outro aspecto único da abordagem é a congruência com as RNAs de Hebb (1949), aplicado aos retornos excessivos em relação aos benchmarks que permitiu prever, com sucesso, os retornos excessivos de ativos individuais. E, ao incorporar a distribuição leptocúrtica assimétrica com o uso da distribuição t de *Student* na classificação dos ativos com base na distribuição dos pesos de mínima variância global de Markowitz (1952) e retorno máximo por desvio padrão de Sharpe (1964), fez uma contribuição substancial para o campo de estudos de formação de portfólios, pois possibilita a obtenção de carteiras ou cluster de ações com uma relação retorno/risco maior do que a expressa pela tradicional curva da fronteira eficiente de Markowitz, dado que assimetrias negativas das carteiras, deslocam a fronteira para um limite além do modelo de Markowitz.

Mais uma contribuição, até onde se tem conhecimento, é que nenhum estudo anterior confirmou o valor agregado das técnicas de aprendizado de máquina capazes de fornecer parâmetros de retorno e risco superiores em comparação com carteiras representativas de investimento em valor, como a de Warren Buffett.

Por último, o estudo contribui com a criação de um produto que é o pacote ANNt para o software R, disponível na plataforma do GitHub, que permite a construção de carteiras utilizando o processo metodológico desenvolvido.

6.3 LIMITAÇÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

O presente estudo apresenta algumas limitações referentes aos dados coletados, à constituição das variáveis, assim como ao método de pesquisa e suas anuências.

A limitação desta pesquisa representa a relativa complexidade computacional do processamento de dados e da aproximação que se adota para medir a forma da distribuição de probabilidade estocástica dos retornos excedentes previstos através da aplicação da distribuição t de *Student*.

Outra limitação desta pesquisa é que a RNA-t foi gerada utilizando o S&P500 como benchmark. Para outro benchmark de mercado, o modelo precisa ser retreinado; assim sendo,

pretende-se e sugere-se fazer isso nos próximos estudos. Entretanto, a RNA-t é uma alternativa interessante para investidores capturarem ineficiências de mercado e poderia ser testada com subamostras para diferentes períodos. A implicação desta pesquisa é útil para o campo da gestão de portfólio; pois oferece aos investidores uma alternativa às estratégias de gestão de risco.

Também é importante reconhecer que não utilizamos 100% do portfólio de Buffet, da Berkshire Hathaway Inc (2022, 2023); em vez disso, foram utilizadas amostras com mais de 80% do valor da carteira, o que nos permitiu gerar uma nova simulação, mesmo que se entenda ser insignificante. Além disso, a falta de informações sobre a aplicação de pesos à carteira de Buffett durante o período representa outra limitação; ao analisar um período de mais de dois anos, considerou-se duas variações de carteiras – uma com e outra sem rebalanceamento de ações.

Para pesquisas futuras, sugere-se replicar a técnica com diferentes ativos e mercados, incluindo mercados emergentes, bolsas de commodities e futuros, e mercado de câmbio. Isto permitiria uma compreensão mais abrangente da aplicabilidade e do desempenho da abordagem em diversos contextos de investimento.

REFERÊNCIAS

AFOLABI, M. O.; OLUDE, O. **Predicting Stock Prices Using a Hybrid Kohonen Self Organizing Map (SOM)**. 2007 40th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'07). **Anais...** Em: 2007 40TH ANNUAL HAWAII INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCES (HICSS'07). jan. 2007.

AHMED, S. et al. Artificial intelligence and machine learning in finance: A bibliometric review. **Research in International Business and Finance**, v. 61, p. 101646, 1 out. 2022.

ALAMINOS, D.; BELÉN SALAS, M. **Multiscale Multifractal Detrended Analysis of Speculative Attacks Dynamics in Cryptocurrencies**. (L. Rutkowski et al., Eds.) Artificial Intelligence and Soft Computing. **Anais...**: Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2023.

ALBULESCU, C. T. COVID-19 and the United States financial markets' volatility. **Finance Research Letters**, v. 38, p. 101699, jan. 2021.

ALI, S. et al. Stock market efficiency: A comparative analysis of Islamic and conventional stock markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 503, p. 139–153, 1 ago. 2018.

ARSHAD, S. et al. Investigating stock market efficiency: A look at OIC member countries. **Research in International Business and Finance**, v. 36, p. 402–413, 1 jan. 2016.

ATSALAKIS, G. S.; VALAVANIS, K. P. Surveying stock market forecasting techniques – Part II: Soft computing methods. **Expert Systems with Applications**, v. 36, n. 3, Part 2, p. 5932–5941, 1 abr. 2009.

BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 17, p. 21–86, 1900.

BAS, E.; EGRIOGLU, E.; TUNC, T. Multivariate Picture Fuzzy Time Series: New Definitions and a New Forecasting Method Based on Pi-Sigma Artificial Neural Network. **Computational Economics**, v. 61, n. 1, p. 139–164, 1 jan. 2023.

BASTIANIN, A. Robust measures of skewness and kurtosis for macroeconomic and financial time series. **Applied Economics**, v. 52, n. 7, p. 637–670, 7 fev. 2020.

BEN-HORIM, M. Stochastic Dominance and Truncated Sample Data. **Journal of Financial Research**, v. 13, n. 2, p. 105–116, 1990.

BERKSHIRE HATHAWAY INC. **SEC FORM 13-F Information Table**. Disponível em: <https://www.sec.gov/Archives/edgar/data/1067983/000095012322009450/xslForm13F_X01/15796.xml>. Acesso em: 20 abr. 2023.

BERKSHIRE HATHAWAY INC. **SEC FORM 13-F Information Table**. Disponível em: <https://www.sec.gov/Archives/edgar/data/1067983/000095012323008074/xslForm13F_X02/25376.xml>. Acesso em: 20 maio. 2023.

CHEN, L.; PELGER, M.; ZHU, J. **Deep Learning in Asset Pricing**. Rochester, NY, 4 abr.

2019. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/abstract=3350138>>. Acesso em: 1 out. 2022

CHOI, G. et al. Price fairness: Clean energy stocks and the overall market. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 168, p. 113049, 1 mar. 2023.

CHONG, E.; HAN, C.; PARK, F. C. Deep learning networks for stock market analysis and prediction: Methodology, data representations, and case studies. **Expert Systems with Applications**, v. 83, p. 187–205, 15 out. 2017.

CHRISTOFFERSEN, P. F. Evaluating Interval Forecasts. **International Economic Review**, v. 39, n. 4, p. 841–862, 1998.

CORNELL, B.; DAMODARAN, A. The Big Market Delusion: Valuation and Investment Implications. **Financial Analysts Journal**, v. 76, n. 2, p. 15–25, 23 abr. 2020.

DAMODARAN, A. **Value and risk: Beyond betas-Coleção principal da Web of Science**. Disponível em: <<https://www-webofscience.ez96.periodicos.capes.gov.br/wos/woscc/full-record/WOS:000228098800010>>. Acesso em: 10 abr. 2023a.

DAMODARAN, A. Value and Risk: Beyond Betas. **Financial Analysts Journal**, v. 61, n. 2, p. 38–43, mar. 2005b.

DE MIRANDA CARDOSO, J. V.; YING, J.; PALOMAR, D. **Graphical Models in Heavy-Tailed Markets**. Advances in Neural Information Processing Systems. **Anais...Curran Associates, Inc.**, 2021. Disponível em: <https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2021/hash/a64a034c3cb8eac64eb46ea474902797-Abstract.html>. Acesso em: 1 maio. 2023

DELGADO, F. J. et al. Tax avoidance and earnings management: a neural network approach for the largest European economies. **Financial Innovation**, v. 9, n. 1, p. 19, 11 jan. 2023.

EAKINS, S. G.; STANSELL, S. R. Can value-based stock selection criteria yield superior risk-adjusted returns: an application of neural networks. **International Review of Financial Analysis**, v. 12, n. 1, p. 83–97, 1 jan. 2003.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. Valuation and Asset Selection Under Alternative Investment Opportunities. **The Journal of Finance**, v. 31, n. 2, p. 525–539, 1976.

EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. **Modelling Extremal Events**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.

ENKE, D.; THAWORNWONG, S. The use of data mining and neural networks for forecasting stock market returns. **Expert Systems with Applications**, v. 29, n. 4, p. 927–940, 1 nov. 2005.

FAHLENBRACH, R. Founder-CEOs, Investment Decisions, and Stock Market Performance. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 44, n. 2, p. 439–466, abr. 2009.

FAMA, E. F. The Behavior of Stock-Market Prices. **The Journal of Business**, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965.

FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **The Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.

- FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Application**. New York: Wiley & Sons Inc., 1966. v. 1–2
- FERNÁNDEZ, A.; GÓMEZ, S. Portfolio selection using neural networks. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 4, p. 1177–1191, 1 abr. 2007.
- FERNÁNDEZ, C.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M. F. J. Modeling and Inference with v -Spherical Distributions. **Journal of the American Statistical Association**, v. 90, n. 432, p. 1331–1340, 1 dez. 1995.
- FRITSCH, S. et al. **Training of neural networks**. Package ‘neuralnet’, 2019. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/neuralnet/neuralnet.pdf>>.
- GAUSS, C. F. **Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium**. [s.l.] Sumtibus F. Perthes et I.H. Besser, 1809.
- GETTY, J. P. **My life and fortunes**. [1st ed.] ed. New York: Duell, Sloan & Pearce, 1963.
- GRAHAM, B. Some Investment Aspects of Accumulation Through Equities. **The Journal of Finance**, v. 17, n. 2, p. 203–214, 1962.
- GREDIL, O. R. Do Private Equity Managers Have Superior Information on Public Markets? **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 57, n. 1, p. 321–358, fev. 2022.
- GREENBLATT, J. **The Little Book That Beats the Market**. Disponível em: <https://www.goodreads.com/book/show/75889.The_Little_Book_That_Beats_the_Market>. Acesso em: 12 mar. 2024.
- HAMADA, R. S. Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporation Finance. **Journal of Finance**, v. 24, n. 1, p. 13–31, 1969.
- HARLOW, W. V. Asset Allocation in a Downside-Risk Framework. **Financial Analysts Journal**, v. 47, n. 5, p. 28–40, 1 set. 1991.
- HAYKIN, S. **Neural networks. A comprehensive foundation**. [s.l.] Pearson Prentice Hall, 1994.
- HEBB, D. O. The Organization of Behavior. **Brain Research Bulletin**, v. 50, n. 5, p. 437, 1949.
- HUDAK, N. S&P Dow Jones Indices: S&P U.S. Indices Methodology. p. 56, 2022.
- HURST, H. E. Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, v. 116, n. 1, p. 770–799, 1 jan. 1951.
- JANG, B.-G.; PARK, S. Ambiguity and optimal portfolio choice with Value-at-Risk constraint. **Finance Research Letters**, v. 18, p. 158–176, 1 ago. 2016.
- JENSEN, M. C. The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964. **The Journal of Finance**, v. 23, n. 2, p. 389–416, 1968.
- KAPPOU, K.; BROOKS, C.; WARD, C. The S&P500 index effect reconsidered: Evidence from overnight and intraday stock price performance and volume. **Journal of Banking &**

Finance, v. 34, n. 1, p. 116–126, 1 jan. 2010.

KARA, Y.; ACAR BOYACIOGLU, M.; BAYKAN, Ö. K. Predicting direction of stock price index movement using artificial neural networks and support vector machines: The sample of the Istanbul Stock Exchange. **Expert Systems with Applications**, v. 38, n. 5, p. 5311–5319, 1 maio 2011.

KELINGER, T. C.; TAYLOR. **Marketing research: an applied approach**. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1979.

KUO, R. J.; CHEN, C. H.; HWANG, Y. C. An intelligent stock trading decision support system through integration of genetic algorithm based fuzzy neural network and artificial neural network. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 118, n. 1, p. 21–45, 16 fev. 2001.

LEUNG, M. T.; DAOUK, H.; CHEN, A.-S. Forecasting stock indices: a comparison of classification and level estimation models. **International Journal of Forecasting**, v. 16, n. 2, p. 173–190, 1 abr. 2000.

LI, D. et al. Dynamic asymmetric dependence and portfolio management in cryptocurrency markets. **Finance Research Letters**, v. 48, p. 102829, 1 ago. 2022.

LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. **The Review of Economics and Statistics**, v. 47, n. 1, p. 13, fev. 1965.

LONG, W.; LU, Z.; CUI, L. Deep learning-based feature engineering for stock price movement prediction. **Knowledge-Based Systems**, v. 164, p. 163–173, 15 jan. 2019.

MACIEL, L. A new approach to portfolio management in the Brazilian equity market: Does assets efficiency level improve performance? **The Quarterly Review of Economics and Finance**, v. 81, p. 38–56, 1 ago. 2021.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MASHAYEKHI, Z.; OMRANI, H. An integrated multi-objective Markowitz–DEA cross-efficiency model with fuzzy returns for portfolio selection problem. **Applied Soft Computing**, v. 38, p. 1–9, 1 jan. 2016.

MASSA, M.; YADAV, V. Investor Sentiment and Mutual Fund Strategies. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 50, n. 4, p. 699–727, ago. 2015.

MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 5, n. 4, p. 115–133, 1 dez. 1943.

MONTGOMERY, D. C. **Design analysis and Analysis of Experiments**. [s.l.] Wiley, 2013.

MORRIS, T.; COMEAU, J. Portfolio creation using artificial neural networks and classification probabilities: a Canadian study. **Financial Markets and Portfolio Management**, v. 34, n. 2, p. 133–163, 1 jun. 2020.

MUSTAFA, A. A.; LIN, C.-Y.; KAKINAKA, M. Detecting market pattern changes: A machine learning approach. **Finance Research Letters**, v. 47, p. 102621, 1 jun. 2022.

NAMETALA, C. A. L. et al. Use of Econometric Predictors and Artificial Neural Networks for the Construction of Stock Market Investment Bots. **Computational Economics**, v. 61, n. 2, p. 743–773, 1 fev. 2023.

NASEER, M.; BIN TARIQ, D. Y. **The Efficient Market Hypothesis: A Critical Review of the Literature**. Rochester, NY, 13 jan. 2016. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/abstract=2714844>>. Acesso em: 9 fev. 2023

OLIVEIRA, A.; CERETTA, P. S. **A Quantitative Method of Building Portfolios to Outperform Buffet**. Rochester, NY, 18 nov. 2022. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/abstract=4280367>>. Acesso em: 16 mar. 2023

OLIVEIRA, A.; CERETTA, P. S.; ALBRECHT, P. Performance comparison of multifractal techniques and artificial neural networks in the construction of investment portfolios. **Finance Research Letters**, p. 103814, 11 abr. 2023.

OLIVEIRA, A. S. DE; CERETTA, P. S. **ANNt Package for R**. Disponível em: <<https://github.com/aleoli05/ANNt>>. Acesso em: 28 set. 2023.

OLSON, D.; MOSSMAN, C. Neural network forecasts of Canadian stock returns using accounting ratios. **International Journal of Forecasting**, v. 19, n. 3, p. 453–465, 1 jul. 2003.

PEÓN, D.; ANTELO, M.; CALVO, A. A guide on empirical tests of the EMH. **Review of Accounting and Finance**, v. 18, n. 2, p. 268–295, 1 jan. 2019.

PESARAN, M. H.; TIMMERMANN, A. Predictability of Stock Returns: Robustness and Economic Significance. **The Journal of Finance**, v. 50, n. 4, p. 1201–1228, 1995.

PUERTAS, A. M. et al. A new look at financial markets efficiency from linear response theory. **Finance Research Letters**, v. 51, p. 103455, 1 jan. 2023.

QI, M. Nonlinear Predictability of Stock Returns Using Financial and Economic Variables. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 17, n. 4, p. 419–429, 1 out. 1999.

QUAH, T.-S.; SRINIVASAN, B. Improving returns on stock investment through neural network selection. **Expert Systems with Applications**, v. 17, n. 4, p. 295–301, 1 nov. 1999.

RACHEV, S. T. et al. Risk Management and Portfolio Optimization for Volatile Markets. Em: GUERARD, J. B. (Ed.). **Handbook of Portfolio Construction**. Boston, MA: Springer US, 2010. p. 493–508.

RACHEV, Z.; RACHEVA-LOTOVA, S.; STOYANOV, S. **Capturing fat tails**. Disponível em: <<https://www.risk.net/node/1603830>>. Acesso em: 26 fev. 2023.

RATHER, A. M.; AGARWAL, A.; SASTRY, V. N. Recurrent neural network and a hybrid model for prediction of stock returns. **Expert Systems with Applications**, v. 42, n. 6, p. 3234–3241, 15 abr. 2015.

ROSENBERG, B.; REID, K.; LANSTEIN, R. Persuasive Evidence of Market Inefficiency (Spring 1985). Em: **Persuasive Evidence of Market Inefficiency (Spring 1985)**. [s.l.] Princeton University Press, 2021. p. 48–55.

ROSENBLATT, F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. **Psychological Review**, v. 65, p. 386–408, 1958.

RUSSELL, K.; RENNISON, J. These Seven Tech Stocks Are Driving the Market. **The New York Times**, 22 jan. 2024.

SANT'ANNA, L. R.; FILOMENA, T. P.; CALDEIRA, J. F. Index tracking and enhanced indexing using cointegration and correlation with endogenous portfolio selection. **The Quarterly Review of Economics and Finance**, v. 65, p. 146–157, 1 ago. 2017.

SANTUR, Y. A Novel Financial Forecasting Approach Using Deep Learning Framework. **Computational Economics**, 14 jun. 2023.

SELVAMUTHU, D.; KUMAR, V.; MISHRA, A. Indian stock market prediction using artificial neural networks on tick data. **Financial Innovation**, v. 5, n. 1, p. 16, 21 mar. 2019.

SHANG, J. S.; TADIKAMALLA, P. R. Modeling financial series distributions: a versatile data fitting approach. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 07, n. 03, p. 231–251, maio 2004.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.

SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance. **The Journal of Business**, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

SOLLICH, P.; KROGH, A. **Learning with ensembles: How overfitting can be useful**. Advances in Neural Information Processing Systems. **Anais...MIT Press**, 1995. Disponível em: <<https://proceedings.neurips.cc/paper/1995/hash/1019c8091693ef5c5f55970346633f92-Abstract.html>>. Acesso em: 13 mar. 2024

SORTINO, F. A.; PRICE, L. N. Performance Measurement in a Downside Risk Framework. **The Journal of Investing**, v. 3, n. 3, p. 59–64, 31 ago. 1994.

SOYSTER, A. L. Technical Note—Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming. **Operations Research**, v. 21, n. 5, p. 1154–1157, 1973.

STOYANOV, S. V. et al. Fat-Tailed Models for Risk Estimation. **The Journal of Portfolio Management**, v. 37, n. 2, p. 107–117, 31 jan. 2011.

STUDENT. The Probable Error of a Mean. **Biometrika**, v. 6, n. 1, p. 1–25, 1908.

TICKNOR, J. L. A Bayesian regularized artificial neural network for stock market forecasting. **Expert Systems with Applications**, v. 40, n. 14, p. 5501–5506, 15 out. 2013.

ȚIȚAN, A. G. The Efficient Market Hypothesis: Review of Specialized Literature and Empirical Research. **Procedia Economics and Finance**, Emerging Markets Queries in Finance and Business 2014, EMQFB 2014, 24-25 October 2014, Bucharest, Romania. v. 32, p. 442–449, 1 jan. 2015.

TIWARI, A. K.; AYE, G. C.; GUPTA, R. Stock market efficiency analysis using long spans of

Data: A multifractal detrended fluctuation approach. **Finance Research Letters**, v. 28, p. 398–411, 1 mar. 2019.

TREYNOR, J. L. **Jack Treynor’s “Toward a Theory of Market Value of Risky Assets”**. Rochester, NY, 1962. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/abstract=628187>>. Acesso em: 27 nov. 2022

TREYNOR, J. L. How to rate management of investment funds. **Harvard Business Review**, Harvard Business Review. v. 43, n. 1, p. 63–75, 1965.

TURING, A. M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. s2-42, n. 1, p. 230–265, 1937.

TYAGI, A.; ABRAHAM, A. **Recurrent Neural Networks. Concepts and Applications**. 1. ed. Oxford: CRC Press Taylor & Francis Group, 2022.

YING, X. An Overview of Overfitting and its Solutions. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1168, n. 2, p. 022022, fev. 2019.

ZHANG, Y.; CHU, G.; SHEN, D. The role of investor attention in predicting stock prices: The long short-term memory networks perspective. **Finance Research Letters**, v. 38, p. 101484, 1 jan. 2021.

ZHONG, X.; ENKE, D. A comprehensive cluster and classification mining procedure for daily stock market return forecasting. **Neurocomputing**, v. 267, p. 152–168, 6 dez. 2017.

ZIEMBA, W. T. The five investor camps that try to beat the stock market. **Borsa Istanbul Review**, v. 20, n. 4, p. 301–306, dez. 2020.

ZUMBACH, G. A Gentle Introduction to the RM2006 Methodology. **SSRN Electronic Journal**, 15 jan. 2007.

APÊNDICE A – ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO EM SOFTWARE R

```
#ANNt
```

```
#Artificial Neural Network with 't' Distribution Portfolio
```

```
#SINGLE COMMAND FOR THE ENTIRE PACKAGE AFTER INSTALLING THE
```

```
#REQUIRED PACKAGES#
```

```
install.packages('remotes')
```

```
library(remotes)
```

```
ANNt_Oliveira_Ceretta(c('AAPL','XOM','TSLA','KO','F'), '^GSPC', 0, '2018-01-03',
'2022-12-29', '', 'daily', 5, 2500, 3)
```

```
# Follow the steps for the test step by step:
```

```
# 1) Install and enable remotes package:
```

```
install.packages('remotes')
```

```
library(remotes)
```

```
# 2) Install and enable the ANNt package:
```

```
install_github('aleoli05/ANNt')
```

```
library(ANNt)
```

```
# 3) Install all required package in ANNt:
```

```
install_required_package()
```

```
# 4) Import the assets series, example:
```

```
Assets_series (Tickers=c('AAPL','GOOG','CCBG','XOM','TSLA'),'^GSPC', '2018-01-03',
'', 'daily')
```

```
# 5) ANNt order generate, example:
```

```
ANNt_order ('2018-01-11', '2022-12-30', '', 5, 2500)
```

```
# 6) Generate portfolios, example:
```

```
Gen_portfolios(5,'2023-01-03','',0)
```

```
# 7) Portfolios Backtesting, example:
```

```
Portfolios_backtesting()
```

```
# 8) Plot Cumulative Portfolio Returns, example:
```

```
Plot_Cumulative>Returns("")
```

9) Generate Efficient Frontier of Markowitz:

```
Gen_efficient_frontier(",")
```

10) Plot the Efficient Frontier graphic:

```
Plot_efficient_frontier()
```

11) Plot the New Efficient Frontier:

```
Plot_New_Efficient_Frontier()
```

12) Plot the Cumulative Sum of Returns (CUSUM Graphic):

```
Plot_CUSUM(1,5)
```

13) Save copy of alls processed data, example:

```
Backup_ANNt()
```